

XXI

**Encuentro
Internacional
de Matemáticas
EIMAT 2025**

Del 12 al 14 de noviembre de 2025

XXI Encuentro Internacional de Matemáticas

Memorias EIMAT 2025

Editado por:

Gustavo Quintero
Jesus Berdugo

© publicaciones universidad del atlántico
<https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/publicaciones>

XXI Encuentro Internacional de Matemáticas

Memorias EIMAT 2025

Editado por:

Gustavo Quintero

Jesus Berdugo

© publicaciones universidad del atlántico

<https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/publicaciones>

ISSN: 2346-1594

Noviembre 12, 13 y 14 de 2025



Programa de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas

Universidad del Atlántico, Carrera 30 Número 8-49, Puerto Colombia - Atlántico

Editorial

El Encuentro Internacional de Matemáticas, conocido como EIMAT, se ha consolidado como un espacio académico de alta relevancia para la divulgación y discusión de resultados de investigación en matemáticas y áreas afines. A lo largo de los años, este evento ha contribuido de manera decisiva a la actualización académica de estudiantes, docentes e investigadores, fortaleciendo los vínculos de colaboración entre la Universidad del Atlántico, la región Caribe y la comunidad científica nacional e internacional.

En EIMAT 2025 reafirmamos este propósito, propiciando un ambiente de intercambio riguroso y formativo. El programa académico integró conferencias de alto nivel, cursillos temáticos y sesiones de presentación de trabajos, favoreciendo el diálogo entre diversas líneas de investigación y promoviendo el crecimiento académico de quienes participan en el evento. De manera especial, el encuentro permitió visibilizar avances desarrollados por estudiantes y grupos de investigación, incentivando la cultura de la investigación y el trabajo colaborativo en nuestros programas.

El éxito de EIMAT 2025 es el resultado del compromiso colectivo de conferencistas, cursillistas, ponentes y asistentes, así como del esfuerzo sostenido de los comités académico y organizador, del equipo logístico y del valioso apoyo institucional. Expresamos nuestro agradecimiento a las unidades académicas y administrativas que hicieron posible la realización del evento, y destacamos la dedicación de quienes trabajaron en la planeación, evaluación y desarrollo de cada una de las actividades.

Confiamos en que EIMAT 2025 haya sido, para toda la comunidad, un escenario de encuentro, aprendizaje y proyección, y que sus resultados continúen impulsando la excelencia académica y la investigación en matemáticas. Extendemos un reconocimiento especial a todas las personas que, con su entrega, disciplina y sentido de pertenencia, contribuyeron al fortalecimiento y prestigio del encuentro.

Sinceramente,

Carlos Arayo Martínez

XXI Encuentro Internacional de Matemáticas

Memorias EIMAT 2025

Volumen 14, Nro 1 Año 2025

ISSN: 2346-1594

Presidente

Carlos Araujo Martínez

Secretario

Jesus Berdugo

Editores

Gustavo Quintero

Jesus Berdugo

Comité Editorial

Adolfo Pimienta Acosta

Alfredo Roa Narváez

Gustavo Quintero

Jesus Berdugo

John Rodríguez

Tovias Castro Polo

Rector Universidad del Atlántico

Danilo Hernández Rodríguez

Vicerrector de Docencia

Alejandro Urieles Guerrero

Vicerrector de Investigación, Extensión y Proyección Social

Miguel Caro Candezano

Decana Facultad Ciencias Básicas

Karina Isabel Castellanos Romero

Coordinador Programa de Matemáticas

Carlos Araujo Martínez

Jefe del Departamento de Extensión y Proyección Social

Melisa Del Carmen Eyes Escalante

El material de esta publicación no puede ser reproducido sin la autorización de los autores y editores.



XXI Encuentro Internacional de Matemáticas

Información General

Presentación

El XXI Encuentro Internacional de Matemáticas EIMAT 2025 se realizó del 12 al 14 de noviembre en las instalaciones de la Universidad del Atlántico y la Universidad Simón Bolívar. La ceremonia de clausura tuvo lugar en la sala de conferencias 1 del edificio de posgrados de la Universidad de la Costa CUC. El evento tuvo como propósito promover el intercambio académico en matemáticas y áreas afines mediante conferencias, cursillos y espacios de socialización de resultados de investigación. La programación integró actividades de formación y divulgación dirigidas a estudiantes, docentes e investigadores, fortaleciendo la cultura científica y los vínculos de colaboración a nivel regional, nacional e internacional.

Comité Organizador


















- Adolfo Pimienta Acosta
- Alfredo Roa Narváez
- Carlos Álvarez Escorcía
- Carlos Araujo Martínez
- Deisy Zabala Barros
- Gustavo Quintero Álvarez
- Francisco Mejía Acuña
- Javier Villa Herrera
- Jesus Berdugo De la Ossa
- Kennedy Hurtado Ibarra
- Laura Fontalvo Ahumada
- Laura Maza Ramírez
- Manuel Fontalvo De La Rosa
- Manuel Orozco Guzmán
- Moisés Arquez Mendoza
- Tovías Castro Polo

Comité Logístico

- Betzaida Ruíz
- Cristian del Valle
- Daniel Mejía
- Freddy Soto
- Janer Sánchez
- Jetsen Rodríguez
- José Blanco
- Leidys Miranda
- Luis Palmet
- Madeleine De La Hoz
- Nicole Gómez
- Nicolle Guzmán
- Shirley Arteta
- Yorjanis Luna Fábregas



Comité Científico

- M.Sc. Alberto Reyes, México 
- PhD. Alfonso Castro, Estados Unidos 
- PhD. Carlos Carpintero, Venezuela 
- PhD. Daniel Orey, Brasil 
- PhD. Daniel Rodriguez, Perú 
- PhD. Gabriel Vergara, Colombia 
- PhD. Hugo Leiva, Venezuela 
- PhD. Jose Luis Mendoza, Colombia 
- PhD. Juan Carlos Galvis, Colombia 
- PhD. Jhon Beiro Moreno, Colombia 
- PhD. Mario Pineda, México 
- PhD. Miguel Caro Candezano, Colombia 
- PhD. Mitchael Plaza, Brasil 
- PhD. Milton Rosa, Brasil 
- PhD. Primitivo Acosta-Humánez, República Dominicana 
- PhD. Ramiro Peñas, Colombia 
- PhD. Yamilet Quintana, Venezuela 



XXI Encuentro Internacional de Matemáticas

Índice general

1. ¿ Futuro o presente de la modelación de fenómenos reales complejos: Ciencia de Datos o IA's ?	9
Gabriel Núñez Antonio	9
2. Grafo Ortogonal $OG(\mathbb{Z}_{2,n})$	11
Cristian Andrey Del Valle Orozco	11
3. Empaquetamiento de polígonos irregulares convexos: Algoritmos Genéticos como punto inicial para el modelo de Rectas Separadoras	13
Camilo Andrés Aguilar Hoyos, Jeinny M. Peralta Polo, Alfredo Rafael Roa Narváez . .	13
4. La hipótesis del continuo y su independencia de ZFC	16
Daniel Andrés Hernández Florián	16
5. Hiperbolicidad mediante la derivada Schwarziana para el mapa logístico	18
Miguel Angel Del Real Carmona	18
6. El número de clase en campos cuadráticos	20
Ángel Martínez Avelar	20
7. Aproximación de funciones a través de series de Fourier-Jacobi multiplicativas	21
Edinson Fuentes, Martha Leonor Saiz Saenz	21
8. Esquemas numéricos basados en métodos de elementos virtuales mixtos para el problema de Navier-Stokes-Brinkman	23
Edgar Mauricio Munar Benitez	23
9. Bifurcation analysis of 3D-Filippov systems around Cusp-Fold singularities	25
Oscar Alexander Ramírez Cespedes	25
10. Modos atrapados en una guía de onda cuántica plana con obstáculos sólidos	27
María Isabel Romero Rodríguez, Héctor Machuca Balaguera, Alejandro Garzón Leyton	27
11. Métodos de sumabilidad: el arte de sumar lo imposible	29
María José Ibarra Ariña	29

12. Una ecuación semilineal de cuarto orden con no-linealidad singular y condiciones de frontera homogéneas en modelos de dispositivos nanoelectromecánicos	31
Arturo Sanjuán	31
13. Some Notions of (I, J)-Continuous functions and its relationships with others weak forms of Continuity	33
Ennis Rafael Rosas Rodriguez	33
14. Foliations raised by quadratic-like polynomial submersions on the real plane and a sharp result on the real Jacobian conjecture	35
Ingrid Sofia Meza Sarmiento	35
15. Formulaci3n, deducci3n e implementaci3n de m3todos runge-kutta-nystr3m impl3citos de alto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden	36
Jorge Eli3cer Ospino Portillo, Juan Diego Teher3n Olmos	36
16. Din3mica poblacional de abejas mel3feras y parasitoides: un enfoque mediante sistemas de ecuaciones diferenciales suaves por tramos	38
Carlos Andr3s Trujillo-Salazar	38
17. La incidencia de la demostraci3n matem3tica en el razonamiento argumentativo de las y los profesores de F3sica	41
Juan Sebastian Luna Corredor	41
18. Contextos realistas y cotidianos en la ense1anza del c3lculo diferencial para ingenier3a	43
Pablo Andr3s Acosta Solarte	43
19. Stability, Convergence, and Homoclinic Classes in the Dynamics of the H3non Map	45
Rafael Alvarez, Daniel Rojas, Raibel Arias	45
20. Estrategia l3dica para desarrollar el aprendizaje del concepto de plano cartesiano	48
Juan Carlos Arroyave	48
21. Compacidad de la diferencia de dos operadores de composici3n con peso actuando en espacios de sucesiones $l^p(\omega)$	50
Julio C3sar Ramos Fern3ndez	50
22. Khovanov Homology at the Extremes	52
Gabriel Montoya Vega	52

23. Nuevas familias de polinomios tipo U-Fubini y sus aplicaciones en series de Fourier	54
Hernán David Ortega Castro, Alejandro Urieles	54
24. Traslaciones y Dilataciones de algunos Subdiferenciales	57
Ramiro Peñas Galezo	57
25. De lo Clásico a lo aproximado: Conjuntos para modelar Incertidumbres	59
Alexander Gutiérrez Puche	59
26. Geometría y grafos: ¿Cuánto se necesita saber de una para entender a la otra en la educación secundaria?	61
Danilo Antonio Serpa Sánchez	61
27. Algoritmo de la división en anillos cuadráticos	63
Mario Pineda Ruelas	63
28. Analiticidad de los exponentes de Lyapunov	64
Adriana Sánchez	64
29. Uso de software libre en el estudio del comportamiento de la curva de secado de filetes de cerdo	65
Luis Enrique Mealla Sánchez	65
30. La realidad virtual como nuevo escenario para aprender geometría 3D: contrastes con GeoGebra y material concreto	66
Luis Felipe Parra Molina	66
31. Métodos Numéricos para un Modelo Acoplado de Dinámica de células Cancerígena	68
Ricardo Prato	68
32. La investigación en educación matemática y sus paradigmas: un análisis en la enseñanza de las matemáticas contextualizadas	70
Teovaldo García Romero, Ingris Patricia Trespalcacios Buelvas	70
33. Modelos Cuantílicos Inflados para Datos Proporcionales: Una Extensión desde la Distribución Hazard Proporcional Unitaria	72
Eilen Patricia Espitia Ramos, Roger Jesús Tovar Falón	72
34. Diseño personalizado de teselaciones centroidales de Voronoi	74
Juan Sebastián Castaño Franco, Ernesto G. Birgin	74
35. Introducción a la Geometría Convexa	77
Rafael Melo Jiménez	77

36.S-aproximaciones flexibles y nociones asociadas	79
José Eduardo Sanabria, Katherine Rojo Contreras, Merlys Monterroza Sierra	79
37.Subdivisiones matroidales del permutaedro	81
Carolina Benedetti Velásquez	81
38.Estabilidad tipo Hurwitz de sistemas: un enfoque con la abscisa espectral	82
Carlos Arturo Loredó Villalobos	82
39.Exploración de la función espacio conformacional en moléculas con uno y dos ángulos de rotación	84
David Fernández Bueno, Julio Deluque Gomez, Rafael Ramiro Vega Brito	84
40.Operadores de aproximación bipolar flexible	87
José Eduardo Sanabria, Tania Feria Paternina, Yisbelina Álvarez Balza	87
41.Soluciones (ω, Q)-periódicas de ecuaciones diferenciales semilineales con aplicaciones a redes neuronales tipo Hopfield	89
Stiven Díaz	89
42.Introducción a la inferencia bayesiana y algunas aplicaciones	91
Jose V. Barraza A.	91
43.Un método numérico adaptativo de elementos virtuales para el cálculo de error a posteriori en el modelo de vibración de una placa delgada	93
Iván Darío Velásquez Ramos	93
44.On the evolution of a convolution type differential-difference model	96
Silvia Rueda Sanchez	96
45.Minmax principle and bounds for the eigenvalues of Dirac operators	98
Monika Winklmeier	98
46.Más allá de las funciones: Espacios vectoriales topológicos y distribuciones	100
Oswaldo Dede Mejía	100
47.Propiedad de disipatividad y autopista para el modelo Lotka-Volterra estocástico, controlado y con saltos de Lévy	101
David Castillo-Fernández, Cutberto Romero-Meléndez	101
48.Trapped waves in a rectangular channel with Gaussian bathymetry: A numerical analysis	104
Daniel Felipe Zárate Bello, Maria Isabel Romero Rodríguez, Hector Machuca Balaguera	104
49.Predicción de Dinámicas de la Vegetación con Nixtla y DataLad	107
Gloria Carrascal	107

50. La Inteligencia Artificial En Los Procesos De Enseñanza Y Aprendizaje De Las Matemáticas	108
Julio César Romero Pabón, Gabriel Mauricio Vergara Ríos	108
51. Análisis De Datos Estadísticos Con Inteligencia Artificial	111
Julio César Romero Pabón, Gabriel Mauricio Vergara Ríos	111
52. Análisis De Varianza (Anova) Y Sus Aplicaciones Con El Lenguaje R	114
Julio César Romero Pabón, Gabriel Mauricio Vergara Ríos	114
53. Influencia de una elipse en el cálculo de volumen parcial de un tanque cilíndrico recto inclinado con interfaz tangente a esta	118
Samuel Isaac Suarez Cabarcas	118
54. Homología persistente y su aplicación en espacios químicos	121
Julio Deluque Gomez, Rafa Ramiro Vega Brito, Dairo José Hernández Páez	121
55. New parametric polynomials of U-Charlier-Poisson type: properties and Szász-type operators including these polynomials	123
Javier Villa, Alejandro Urieles	123
56. Modelado In-Silico de crecimiento anómalo en tejido pulmonar mediante fractales	126
Jose Durán, Juan Vargas, Laura Orjuela, Maria Romero	126
57. Modelos de Machine Learning para la Predicción de Muerte Materna en Colombia (2022)	128
Angie Urrego, Karol Medina, Danny Martínez	128
58. Propagación de una especie invasora en un hábitat fragmentado: un abordaje estocástico	130
Gustavo Guzman, Fabio Lima, Pablo Rodriguez	130
59. Análisis de estabilidad y consistencia dinámica de un esquema de diferencias finitas no estándar para la babesiosis bovina	132
Deccy Yaneth Trejos Angel	132
60. Historia y resultados recientes acerca de la desigualdad de Hardy	134
Héctor Camilo Chaparro Gutiérrez	134
61. Espacios de Sobolev en Espacios Métricos de Medida: Una Aproximación Desde los Espacios de Variación Acotada	136
Oscar Mauricio Guzmán Fonseca	136
62. Nuevas Derivadas locales en el Cálculo Fraccional	138
Miguel Vivas-Cortez	138

63. Matemática Aplicada a la Computación: Retos y Oportunidades	141
Daniel Alexis Gutierrez Pachas	141
64. El teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones en la clasificación de superficies	142
Dylan David Antequera Puyana	142
65. Un primer vistazo al grupo fundamental	144
Fredy Arturo Soto Valencia	144
66. Aplicaciones de las bases de Gröbner para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales multivariadas	146
Edgar Alejandro Triana Quiñones	146
67. Sobre espectros de operadores, propiedades espectrales y ν-convergencia	148
Carlos Rafael Carpintero Figueroa	148
68. Dominios de Dedekind	149
Ángel Martínez Avelar	149
69. Análisis y Pronóstico de la Cantidad de Ataques de Violencia Intrafamiliar en el Departamento de Córdoba	150
Thalía Arrieta Monterroza, Ruth Andrea Hernández Pestana	150
70. Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo y la estabilidad	152
Jaqueline Godoy Mesquita	152
71. Desarrollo de una herramienta computacional para la simulación de flujos con discontinuidades mediante la solución numérica de problemas de Riemann en 1D y 2D	154
Gabriel Chavarro, Jorge Villamizar, Oswaldo Nieto	154
72. Aspectos y generalidades de la teoría de Morse discreta	156
Dairo José Hernández Páez, Julio Deluque Gomez	156
73. Modelo matemático para la interacción áfidos–coccinélidos con respuesta funcional tipo Crowley–Martin	158
Carlos Andrés Trujillo-Salazar, Pedro Elías Martínez-Álvarez	158
74. Análisis topológico de datos: teoría y práctica	161
Jose Perea	161

Miércoles 12 de noviembre

Capítulo 1

¿ Futuro o presente de la modelación de fenómenos reales complejos: Ciencia de Datos o IA's ?

Gabriel Núñez Antonio

Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, México

E-mail: gabo.nunezantonio@gmail.com

Resumen

Hoy en día la modelación matemática de fenómenos reales se ha vuelto todo un problema retador. Lo anterior, ya sea por la gran cantidad de datos disponibles o por la necesidad de contar con resultados confiables en un período de tiempo corto. En esta charla discutiré las coincidencias y diferencias que existen entre dos paradigmas de gran relevancia, los cuales han dotado de un cambio significativo en la descripción de fenómenos reales complejos, la Ciencia de Datos y las Inteligencias Artificiales (IA's). Presentaré los retos que enfrenta el matemático de hoy para aprovechar este tipo de paradigmas, tanto en su carrera académica como profesional. Terminaré con una breve discusión sobre ¿En dónde estamos? y ¿Hacia dónde vamos? con este avasallador crecimiento de la tecnología y del manejo de la información.

Jueves 13 de noviembre

Capítulo 2

Grafo Ortogonal $OG(\mathbb{Z}_{2,n})$

Cristian Andrey Del Valle Orozco

Universidad del Atlántico

E-mail: cadelvalle@mail.uniatlantico.edu.co.

Resumen

En este artículo definimos un grafo tomando los vértices en el anillo de polinomios de grado como máximo n con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , luego definimos una relación de adyacencia entre dichos vértices. Es este el grafo al que llamamos grafo ortogonal $OG(\mathbb{Z}_{2,n})$ para el cual se podemos demostrar algunas características claves como: Demostrar que $OG(\mathbb{Z}_{2,n})$ es un grafo conexo, que no es un grafo plano. Finalmente, uno de los resultados más importantes obtenidos es que podemos conocer el grado de cualquier vértice. Gracias a este hecho, utilizando teoremas clásicos de la teoría de grafos (como el teorema de Dirac), podemos demostrar que el grafo $OG(\mathbb{Z}_{2,n})$ es un grafo hamiltoniano.

Definición 1. Sea $\mathbb{Z}_{2,n}[x] = \{\sum_{i=0}^n a_i x_i : a_i \in \mathbb{Z}_2\}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en \mathbb{Z}_2 y de grado menor o igual a n . Todo polinomio de grado n se puede ver como un vector de $(n+1)$ componentes.

Ahora queremos definir un grafo tal que el conjunto de vértices sea $\mathbb{Z}_{2,n}[x]$, para lograr esto consideremos $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ y $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x_i$ tales que $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_{2,n}[x]$. Definimos $\langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i \pmod{2}$ y esta es la relación de adyacencia entre los vértices $f(x), g(x)$ siempre que $f(x) \neq g(x)$ y $\langle f(x), g(x) \rangle = \bar{0}$.

Ejemplo 1. El conjunto $\mathbb{Z}_{2,2}$ es definido:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{2,2}[x] &= \{\bar{0}, \bar{1}, x, x^2, \bar{1} + x, x + x^2, \bar{1} + x + x^2\} \\ &= \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}\end{aligned}$$

Referencias

- [1] [BM08] J.A. Bondy and U.S.R. Murty *Graph Theory*. Springer, Boston, MA, 2008.

- [2] [Eul36] L Euler. solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, 1736.
- [3] Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz y Thiago Velanga Moreira *Topicos na intersecao entre a Teoria de Grafos e Algebra* Vol. 12. 2016.
- [4] Gordon F Royale y Chris *Algebraic graph theory*. Vol 207. New York: Springer, 2001.

Capítulo 3

Empaquetamiento de polígonos irregulares convexos: Algoritmos Genéticos como punto inicial para el modelo de Rectas Separadoras

Camilo Andrés Aguilar Hoyos

Universidad del Atlántico

candresaguilar@mail.uniatlantico.edu.co

Jeinny M. Peralta Polo

Universidad del Atlántico

jeinnyperalta@mail.uniatlantico.edu.co

Alfredo Rafael Roa Narváez

Universidad del Atlántico

alfredoroa@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema de empaquetamiento de polígonos irregulares (ISPP), en particular convexos, en una región rectangular de ancho fijo y longitud variable, con el objetivo de minimizar la longitud ocupada. Este problema surge con la necesidad de ubicar objetos dentro de un contenedor de forma eficiente, como ocurre al organizar carga en transporte, cortar piezas de tela o maximizar el aprovechamiento de material. Su relevancia en sectores como el aeronáutico, automotriz, textil y de muebles radica en que algoritmos eficientes reducen costos, optimizan materia prima y minimizan residuos, con un impacto ambiental positivo.

En general, el problema se plantea como sigue. Sea Ω una región rectangular de ancho W y p piezas de trabajo (polígonos convexos irregulares) a ubicar dentro de Ω , siendo Ω_i la i -ésima pieza, con área S_i . Cada pieza se representa mediante la lista de coordenadas de sus vértices, con un vértice de referencia en el origen. Se permite la rotación de cada pieza mediante un ángulo θ_i , lo que amplía el conjunto de soluciones factibles. La longitud máxima ocupada se denota por $L_{\text{máx}}$ y la tasa de llenado por $U := \sum_{i=1}^p S_i / (W \cdot L_{\text{máx}})$. El objetivo es minimizar $L_{\text{máx}}$, garantizando que los polígonos estén contenidos dentro de Ω , no se superpongan y cumplan

$0 \leq \theta_i \leq 2\pi$ y $0 \leq U \leq 1$. Así, el problema se formula como en la ecuación (3.1).

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && L_{\text{máx}} \\
&\text{Sujeto a} && \Omega_i \in \Omega, \quad 1 \leq i \leq p \\
&&& \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq p \\
&&& 0 \leq \theta_i \leq 2\pi, \quad 1 \leq i \leq p \\
&&& 0 \leq U \leq 1 \\
&&& L_{\text{máx}} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Para resolver este problema, se utilizó el modelo propuesto en [1], en el que se aborda el empaquetamiento bidimensional irregular mediante un esquema basado en rectas separadoras (RS), el cual es un modelo de programación no lineal basado en movimientos rígidos de los polígonos, escrito en un lenguaje de trigonometría directa. En este modelo una recta es separadora de dos polígonos si un polígono está a un lado de la recta y el otro polígono está al otro lado de la recta, garantizando así la no superposición de los polígonos. Este modelo permite la rotación libre de los polígonos y garantiza la no superposición, ampliando significativamente las posibilidades de colocación; sin embargo, pocos estudios incorporan esta característica. En [2], se implementó la resolución de este modelo para polígonos convexos en MATLAB utilizando la función `fmincon` [3]; sin embargo, tanto esta función como otros métodos exactos de optimización requieren un punto inicial de calidad, que influye considerablemente en la solución obtenida.

Con el fin de generar dicho punto inicial, se empleó un algoritmo genético (AG) [4], aprovechando su capacidad de búsqueda global y adaptación a restricciones geométricas complejas. A diferencia de otras metaheurísticas, como el recocido simulado (SA) [5] o la optimización por enjambre de partículas (PSO) [6, 7], los AG destacan por su simplicidad y facilidad para diseñar operadores de cruce y mutación específicos del problema. Siguiendo la idea de [8], se combinó el AG con programación no lineal, donde el primero genera puntos iniciales y el segundo refina la solución.

En el AG propuesto, cada individuo representa una secuencia de polígonos con rotaciones aleatorias de 0° , 90° , 180° o 270° , buscando maximizar la tasa de llenado. La construcción de cada individuo se realiza con el algoritmo Bottom-Left (BL) [9], y la detección de superposiciones se gestiona mediante la estrategia No-Fit Polygon (NFP) [10], basada en sumas de Minkowski [11, 12, 13]. La técnica Inner-Fit Polygon (IFP) [8] asegura que todas las piezas permanezcan dentro del contenedor.

Aunque el AG por sí solo restringe la rotación libre, su combinación con el modelo RS permitió obtener soluciones más compactas. Los resultados se compararon con los reportados en la literatura para instancias convexas, mostrando en la mayoría de los casos una mejor solución en términos de longitud final.

Palabras clave: Empaquetamiento irregular, algoritmo genético, rectas separadoras, programación no lineal.

Bibliografía

- [1] J. Peralta, M. Andretta, J. F. Oliveira, *Solving irregular strip packing problems with free rotations using separation lines*, *Pesquisa Operacional*, 38:195–214, 2018.
- [2] J. D. Ochoa, *Estudio de un Modelo de Rectas Separadoras para el empaquetamiento de ítems irregulares convexos*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia, 2023.
- [3] *fmincon*, Mathworks.com, <https://la.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>, Accessed: 2025-05-03.
- [4] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [5] M. A. Gomes, J. F. Oliveira, *Solving irregular strip packing problems by hybridising simulated annealing and linear programming*, *European Journal of Operational Research*, vol. 171, no. 3, pp. 811–829, 2006.
- [6] D. Liu, K. C. Tan, S. Huang, C. K. Goh, and W. K. Ho, *On solving multiobjective bin packing problems using evolutionary particle swarm optimization*, *Eur. J. Operational Res.*, vol. 190, no. 2, pp. 357–382, 2008, doi:10.1016/j.ejor.2007.06.032.
- [7] M. A. Shalaby, M. Kashkoush, *A particle swarm optimization algorithm for a 2-d irregular strip packing problem*, *Ajor* 03 (2), 268–278, 2013, doi:10.4236/ajor.2013.32024
- [8] C. Liu, Z. Si, J. Hua, N. Jia, *Optimizing Two-Dimensional Irregular Packing: A Hybrid Approach of Genetic Algorithm and Linear Programming*, *Applied Sciences*, 13(22): 12474, 2023.
- [9] B. Chazelle, *The bottom-left bin-packing heuristic: An efficient implementation*, *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-32, no. 8, pp. 697–707, 1983. doi:10.1109/TC.1983.1676307.
- [10] J. F. Oliveira, A. M. Gomes, and J. S. Ferreira, *Topos - a new constructive algorithm for nesting problems*, *OR Spektrum*, vol. 22, no. 2, pp. 263–284, 2000. doi:10.1007/s002910050105.
- [11] R. Cuninghame-Green, *Geometry, shoemaking and the milk tray problem*, *New Scientist*, No. 1677: 50–53, August 1988.
- [12] P. K. Ghosh, *An algebra of polygons through the notion of negative shapes*, *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Understanding*, 54(1): 119–144, 1991.
- [13] J. Lindmark, *Developing a complete solution to the No Fit Polygon problem*, Master’s thesis, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2013.

Capítulo 4

La hipótesis del continuo y su independencia de ZFC

Daniel Andrés Hernández Florián

Universidad del Atlántico

E-mail: danielandreshernandez@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

Se comienza con el desarrollo de la teoría axiomática de conjuntos necesaria para enunciar la hipótesis del continuo (HC). Una vez enunciada HC, se procede a estudiar los conceptos requeridos sobre lógica de primer orden para probar la independencia de HC. Finalmente, se construyen dos modelos de ZFC. El primero es el universo construible de Gödel, donde se muestra que HC se satisface, concluyendo que $ZFC+HC$ es consistente. El segundo modelo se construye usando el método Forcing en el cual se demuestra que HC falla. Por tanto, al juntar estas dos pruebas de consistencia, queda probado que HC es independiente de ZFC.

Palabras Clave: Teoría ZFC, hipótesis del continuo, lenguaje formal, modelo, universo construible, método forcing.

Bibliografía

- [1] Álvarez, A., y Mota, M., *Forcing: otros mundos posibles*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.
- [2] Cohen, P., *Set theory and the continuum hypothesis*, W.A. Benjamin Inc., Reading, New York, 1966.
- [3] Halmos, P. R., *Teoría intuitiva de conjuntos*, Cecsca, México D.F., 1971.
- [4] Ivorra, C., *Lógica matemática*, Universidad de Valencia, s.f. Web. Consultado el 3 de enero de 2024. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>.
- [5] Ivorra, C., *Pruebas de consistencia*, Universidad de Valencia, s.f. Web. Consultado el 5 de enero de 2025. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>.

- [6] Jech, T. J., *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.
- [7] Kunen, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North Holland, Ámsterdam, 1985.
- [8] Pinter, C., *Set Theory*, Addison-Wesley P.C., Reading, Mass, 1971.

Capítulo 5

Hiperbolicidad mediante la derivada Schwarziana para el mapa logístico

Miguel Angel Del Real Carmona
Universidad del Atlántico
E-mail: madelreal@mail.uniatlantico.edu.co.

Resumen

En este trabajo estamos interesados en dinámica unidimensional, en particular en hiperbolicidad. Para esto estudiamos una herramienta muy útil como lo es la derivada Schwarziana. Dada que la familia de funciones a un parámetro definida en los reales por,

$$f_{\mu}(x) = \mu x(1 - x), \quad (5.1)$$

con $\mu > 1$ tiene derivada Schwarziana negativa, podemos obtener una función inducida o función de primer retorno que localmente es un homeomorfismo, logrando mostrar en detalle que el conjunto:

$$\Lambda_{\mu} = \bigcap_{n \geq 1} f_{\mu}^{-n}([0, 1])$$

es un conjunto hiperbólico para $\mu > 4$.

Palabras Clave: Mapa logístico, conjunto hiperbólico, derivada Schwarziana.

Bibliografía

- [1] B. Aulbach and B. Kieninger, *An Elementary Proof for Hyperbolicity and Chaos of the logistic maps*, J. Difference Equ. Appl. 10 1243-1250, 2004.
- [2] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York, 1989.
- [3] R. Kraft, *Chaos, Cantor sets, and Hyperbolicity for the Logistic Maps*, Mathematical Association of America, 1999.

- [4] C. Robinson, *Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Studies in Advanced Mathematics, 1995.
- [5] P. Rolon, *Dinámica de la Familia Logística*, ANEP-UdelaR, 2018.

Capítulo 6

El número de clase en campos cuadráticos

Ángel Martínez Avelar

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

E-mail: avelar@xanum.uam.mx

Resumen

El número de clase es una invariante fundamental en la teoría algebraica de números, pues mide el grado en que falla la factorización única en el anillo de enteros de un campo de números. En el caso particular de los campos cuadráticos, esta cantidad refleja de manera precisa la estructura del grupo de clases de ideales y permite caracterizar cuándo el anillo de enteros constituye un dominio de factorización única.

En esta exposición se abordará el estudio algebraico del número de clase en campos cuadráticos, analizando su definición a través del grupo de ideales fraccionarios y de los ideales principales. Se destacará la interacción entre la aritmética de los enteros cuadráticos, la estructura de sus unidades y la naturaleza de sus ideales primos. Además, se revisarán resultados clásicos como la cota de Minkowski y el teorema de Dirichlet sobre unidades, enfatizando su papel en la comprensión de la estructura interna del grupo de clases.

El objetivo es mostrar cómo el número de clase sintetiza información profunda sobre la aritmética del campo y constituye un puente entre la factorización, la teoría de Galois y las extensiones abelianas, ilustrando el poder estructural de la teoría algebraica de números.

Palabras Clave: Número de clase, campo cuadrático, grupo de clases, dominios de Dedekind, unidades fundamentales.

Bibliografía

- [1] D. A. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$: Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication*, Wiley, 2013.
- [2] D. A. Marcus, *Number Fields*, Springer, 1977.
- [3] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1999.

Capítulo 7

Aproximación de funciones a través de series de Fourier-Jacobi multiplicativas

Edinson Fuentes

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

E-mail: edinson.fuentes@uptc.edu.co

Martha Leonor Saiz Saenz

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

E-mail: martha.saiz@uptc.edu.co

Resumen

El cálculo diferencial clásico o cálculo newtoniano, se originó en el siglo XVII a partir de la definición de derivada clásica de una función f dada por:

$$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que exista el límite. Desde entonces, diferentes autores han propuesto definiciones alternativas de derivada, dando lugar a otras ramas del cálculo diferentes al cálculo newtoniano, comúnmente conocidas como cálculo no newtoniano. Una de estas definiciones alternativas es la derivada multiplicativa introducida por Grossman y Katz [3], definida de la siguiente manera.

Definición 2. [1]. Sea $\mathbb{R}_e := \{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los números reales exponenciales y sea $f : \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_e$. La derivada multiplicativa de f se define por

$$f^*(x) := \frac{d^*}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)}{f(x)} \right]^{1/h},$$

siempre que el límite exista y sea positivo.

En esta charla se introducen los polinomios de Jacobi multiplicativos, los cuales surgen una de las soluciones de la ecuación diferencial de Sturm–Liouville multiplicativa

$$\frac{d^*}{dx} \left(e^{(1-x^2)\omega(x)} \odot \frac{d^*y}{dx} \right) \oplus \left(e^{n(n+\alpha+\beta+1)\omega(x)} \odot y \right) = 1, \quad x \in [-1, 1],$$

donde $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, con $\alpha, \beta > -1$ y n un número entero no negativo. En particular, se presentan algunas de sus propiedades algebraicas y analíticas, estableciendo su relación con las propiedades de los polinomios de Jacobi clásicos. Finalmente, los polinomios de Jacobi multiplicativos son utilizados para aproximar funciones positivas por medio de Series de Fourier-Jacobi multiplicativas. Los principales resultados que son presentados pueden ser consultados en [2].

Palabras Clave: Cálculo multiplicativo, Polinomios ortogonales, Series de Fourier-Jacobi multiplicativas, aproximación de funciones.

Bibliografía

- [1] A. E. Bashirov et al., *On modeling with multiplicative differential equations*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B. **26** (2011), no. 4, 425–438.
- [2] E. Fuentes, L. E. Garza and F. Velázquez, *On multiplicative Jacobi polynomials and function approximation through multiplicative series*, Rend. Circ. Mat. Palermo , II. Ser **74** (2025), Paper No. 156.
- [3] M. Grossman and R. Katz, *Non-Newtonian Calculus*, Lee Press, Rockport, Mass., 1972.

Capítulo 8

Esquemas numéricos basados en métodos de elementos virtuales mixtos para el problema de Navier-Stokes-Brinkman

Edgar Mauricio Munar Benitez
Universidad Militar Nueva Granada
E-mail: edgar.munar@unimilitar.edu.co

Resumen

En esta charla, presentamos y analizamos un método de elementos virtuales mixto (mixed-VEM) para el problema estacionario de Navier-Stokes-Brinkman en dos dimensiones, el cual modela flujos de fluidos en medios porosos. La formulación continua del problema se basa en la introducción de un tensor de pseudoefuerzo que depende no linealmente de la velocidad. Esta reformulación permite obtener un modelo equivalente, en el que las incógnitas principales son el tensor de pseudoefuerzo y la velocidad, mientras que la presión se recupera mediante una fórmula de postprocesamiento. Asimismo, la condición de incomprensibilidad se incorpora directamente en el esquema continuo, garantizando la consistencia física del flujo.

Para demostrar el buen planteamiento del problema continuo, empleamos una formulación aumentada y una estrategia de punto fijo que permite manejar la no linealidad del modelo. En el contexto discreto, seguimos la estrategia empleada en trabajos previos para problemas similares, utilizando espacios de elementos virtuales tanto para la velocidad como para el pseudoefuerzo. Dichos espacios permiten el uso de proyectores ortogonales sobre espacios polinomiales adecuados, lo que facilita el cómputo explícito de los términos presentes en las formas bilineales y trilineales del esquema. El análisis de solubilidad en el caso discreto se aborda también mediante argumentos de punto fijo, aprovechando las propiedades estructurales de los espacios virtuales y las formas discretas. Finalmente, para el análisis de error, se emplean técnicas del tipo Strang, que nos permiten obtener estimaciones a priori tanto para los componentes computables de la solución como para la presión recuperada por postprocesamiento.

Los resultados numéricos preliminares confirman la robustez y precisión del método propuesto, mostrando un buen comportamiento en geometrías complejas y con mallas poligonales generales, lo que refuerza la flexibilidad y aplicabilidad del enfoque de elementos virtuales en

problemas de mecánica de fluidos complejos.

Producto derivado del proyecto INV-CIAS-4115 financiado por la Universidad Militar Nueva Granada - Vigencia 2025.

Palabras Clave: Métodos de elementos virtuales, esquemas numéricos mixtos, postprocesamiento.

Bibliografía

- [1] L.BEIRÃO DA VEIGA, F. BREZZI, L. MARINI, AND A. RUSSO, *Mixed virtual element methods for general second order elliptic problems on polygonal meshes*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 50 (2016), no. 3, 727–747.
- [2] G. N. GATICA, M. MUNAR, AND F. A. SEQUEIRA, *A mixed virtual element method for the Navier-Stokes equations*. Math. Models Methods Appl. Sci. 28 (2018), no. 14, 2719–2762.
- [3] G. N. GATICA AND M. MUNAR, AND F. A. SEQUEIRA, *A mixed virtual element method for the Boussinesq problem on polygonal meshes*, Journal of Computational Mathematics, vol. 39, 3, (2021) pp. 392-427
- [4] G.N. GATICA, M. MUNAR AND F.A. SEQUEIRA, *A mixed virtual element method for a nonlinear Brinkman model of porous media flow*. Calcolo 55 (2018), no. 2, article:21.

Capítulo 9

Bifurcation analysis of 3D-Filippov systems around Cusp-Fold singularities

Oscar Alexander Ramírez Cespedes
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
E-mail: osaramirez@udistrital.edu.co

Resumen

This paper investigates the local behavior of 3D Filippov systems $Z = (X, Y)$, focusing on the dynamics around cusp-fold singularities. These singular points, characterized by cubic contact of vector field X and quadratic contact of vector field Y on the switching manifold, are structurally unstable under small perturbations of Z , giving rise to significant bifurcation phenomena.

We analyze the bifurcations of a 3D Filippov system around an invisible cusp-fold singularity, providing a detailed characterization of its crossing dynamics under certain conditions. We classify the characteristics of the singularity when it emerges generically in one-parameter families (a codimension-one phenomenon), and we show that no crossing limit cycles (CLCs) locally bifurcate from it in this particular scenario. When the vector fields X and Y are anti-collinear at the cusp-fold singularity, we provide conditions for the generic emergence of this point in two-parameter families (a codimension-two phenomenon). In this case, we show that the unfolding of such a singularity leads to a bifurcating CLC, which degenerates into a fold-regular polycycle (self-connection at a fold-regular singularity).

Palabras Clave: Filippov systems, Bifurcation Theory, cusp-fold singularity, boost converter, crossing limit cycle, polycycle.

Bibliografía

- [1] K. S. Andrade, O. M. Gomide, and D. D. Novaes, Bifurcation diagrams of global connections in Filippov systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 50, p. 101397, 2023.
- [2] M. D. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth Dynamical Systems Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2008.

-
- [3] C. Bonet-Reves, J. Larrosa, and T. M-Seara, Regularization around a generic codimension one fold-fold singularity, *Journal of Differential Equations* 265, pp. 1761–1838, 2018.
 - [4] T. Carvalho, M. A. Teixeira, and D. J. Tonon, Asymptotic stability and bifurcations of 3d piecewise smooth vector fields, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 67, p. 31, 2016.
 - [5] J. Castillo and F. Verduzco, Pseudo-Bautin bifurcation in 3D Filippov systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 32, p. 2250120, 2022.
 - [6] M. M. Castro, R. M. Martins, and D. D. Novaes, A note on vishik’s normal form, *Journal of Differential Equations* 281, pp. 442–458, 2021.

Capítulo 10

Modos atrapados en una guía de onda cuántica plana con obstáculos sólidos

María Isabel Romero Rodríguez
Universidad Militar Nueva Granada
E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co

Héctor Machuca Balaguera
Universidad Militar Nueva Granada
E-mail: hector.machuca@unimilitar.edu.co

Alejandro Garzón Leyton
Universidad Militar Nueva Granada
E-mail: alejandro.garzon@unimilitar.edu.co

Resumen

La teoría de los modos atrapados en guías de onda resulta de gran relevancia en diversos problemas físicos, tales como la dinámica de fluidos, el electromagnetismo y la acústica [2, 4].

La aparición de modos atrapados está asociada a perturbaciones en la guía de onda. Se definen como soluciones estacionarias que permanecen confinadas dentro de una región limitada sin propagarse hacia el infinito, pudiendo llegar a generar fenómenos de resonancias con posibles implicaciones en la integridad estructural. [2, 3]. Cuando el obstáculo posee simetría respecto al eje horizontal es bastante conocida su existencia. *cf.* [4]

Los resultados que se presentan en esta ponencia corresponden justamente a los obtenidos para una guía de onda cuántica expuestos en [4] donde se construyeron soluciones exactas y se demostró la unicidad del modo discreto, su analiticidad respecto a los parámetros ε , $\varepsilon \ln \varepsilon$ y la existencia del modo imbuído bajo simetría vertical. Además se plantea el problema numérico para cuando la guía de onda es finita.

Producto derivado del proyecto IMP CIAS 4084 financiado por la Universidad Militar Nueva Granada, Vigencia 2025.

Palabras Clave: Modos atrapados, resonancias, guía de onda.

Bibliografía

- [1] C. M. Linton y P. McIver, “Modos atrapados incrustados en ondas de agua y acústica,” *Wave Motion*, vol. 45, núms. 1–2, pp. 16–29, 2007. ISSN 0165-2125.
- [2] X. Dai, Similitud y diferencia en las funciones propias de varios tipos de modos de atrapamiento acústico,” *Revista de Mecánica de Fluidos*, vol. 980, artículo A1, 2024. doi:10.1017/jfm.2023.1072.
- [3] V. Pagneux, “Modos atrapados y resonancias de borde en acústica y elasticidad,” en *Fenómenos de localización dinámica en elasticidad, acústica y electromagnetismo*, R. V. Craster y J. Kaplunov (eds.), Centro Internacional de Ciencias Mecánicas CISM, vol. 547, Springer, Viena, 2013. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1619-7_5.
- [4] P. Zhevandrov, A. Merzon, y M. I. Romero Rodríguez, “The Dirichlet–Neumann operator for oblique water waves over a submerged thin cylinder and an application,” *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 28, pp. 121–129, 2021.

Capítulo 11

Métodos de sumabilidad: el arte de sumar lo imposible

María José Ibarra Ariña

Universidad de Cartagena

E-mail: mibarraa@unicartagena.edu.co

Resumen

El estudio de las series infinitas constituye un tema central dentro del análisis matemático, no solo por su relevancia histórica, sino también por sus múltiples aplicaciones en física, ingeniería, ciencias de la computación y otras áreas del conocimiento. Tradicionalmente, el concepto de convergencia ha delimitado el alcance de las series como herramienta teórica y práctica. Sin embargo, un número considerable de series de interés no satisface las condiciones de convergencia clásica, lo cual ha motivado el desarrollo de métodos alternativos que permitan asignar valores significativos a expresiones divergentes, lo que ha motivado el desarrollo de los métodos de sumabilidad, herramientas que permiten asignar valores consistentes a series divergentes. En este póster expondremos los métodos de Cesàro, Abel y matrices, los cuales extienden y generalizan la noción tradicional de convergencia.

Definición 3. Sea (s_n) la sucesión de sumas parciales de una serie $\sum a_n$. Se dice que la serie es Cesàro-sumable de orden 1 si la sucesión

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$$

converge a un número real S . En tal caso se escribe $\sum a_n = S(C, 1)$.

Definición 4. La serie $\sum a_n$ es Abel-sumable al valor S si la función generadora

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad 0 \leq r < 1,$$

converge para todo r en $[0, 1)$ y además $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = S$.

Definición 5. Sea $A = (a_{nk})$ una matriz infinita de números reales. Para una sucesión $x = (x_k)$, definimos la transformación

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k.$$

Una serie $\sum a_n$ se dice sumable por el método de matrices A si la sucesión de sumas parciales transformadas $(As)_n$ converge.

Ejemplo. La serie alternante de Grandi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

no converge en el sentido usual. Sin embargo, por el método de Cesàro de orden 1 se obtiene $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{2}$. De manera equivalente, aplicando el método de Abel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \frac{1}{1+r}, \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 1. Si una serie es sumable por el método de Cesàro de orden 1 al valor S , entonces también es sumable por el método de Abel al mismo valor.

Demostración. Ver [1]. □

Palabras Clave: series divergentes, sumabilidad, método de Cesàro, método de Abel, métodos de matrices.

Bibliografía

- [1] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, 1949. Second edition by Chelsea Publishing Co., 1991. Reprinted by the American Mathematical Society in 2000 and 2013.
- [2] H. Dutta and B. E. Rhoades (eds.), *Current Topics in Summability Theory and Applications*, Springer, Singapore, 2016. DOI: 10.1007/978-981-10-0913-6.
- [3] M. Buntinas, *Classical and Discrete Functional Analysis with Measure Theory*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge–New York, 2022. DOI: 10.1017/9781139524445.

Capítulo 12

Una ecuación semilineal de cuarto orden con no-linealidad singular y condiciones de frontera homogéneas en modelos de dispositivos nanoelectromecánicos

Arturo Sanjuán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

E-mail: aasanjuanc@udistrital.edu.co

Resumen

En el presente trabajo estudiamos la ecuación diferencial adimensional con condiciones de frontera homogéneas

$$\begin{cases} w^{(iv)}(x) = \frac{\alpha}{(1-w)^2}, \\ w(0) = w'(0) = w'(1) = w(1) = 0. \end{cases}$$

Esta ecuación modela la deflexión de un dispositivo nanoelectromecánico conocido como nanopuente unidimensional. En este modelo, el parámetro α está asociado al voltaje aplicado.

Desde el enfoque analítico y en dimensiones arbitrarias, se ha demostrado la existencia de soluciones mediante el método de sub y supersoluciones [2]. Numéricamente, el método de diferencias finitas es ampliamente utilizado para resolver este tipo de ecuaciones [3, cap. 3]. Desde el enfoque semi-analítico se emplean diversos métodos para encontrar soluciones [3, cap. 2].

En este trabajo se implementa el método de shooting bidimensional [1] para obtener soluciones numéricas mediante simulaciones computacionales en Python. Este enfoque permite resolver el problema de valores en la frontera mediante su conversión a un problema de valor inicial, abriendo además perspectivas para un nuevo enfoque analítico a este problema. Comparamos nuestros resultados con los resultados teóricos obtenidos en [2].

Este trabajo cuenta con financiamiento parcial de la Oficina de Investigaciones de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (proyecto PIS-2025-2063).

Bibliografía

- [1] P. Amster and P. P. Cárdenas Alzate, *A shooting method for a nonlinear beam equation*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **68** (2008), 2072–2078.
- [2] D. Cassani, J. M. do Ó, and N. Ghoussoub, *On a Fourth Order Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity*, *Advanced Nonlinear Studies*, **9** (2009), 177–197.
- [3] A. Koochi and M. Abadyan, *Nonlinear Differential Equations in Micro/Nano Mechanics: Application in Micro/Nanostructures and Electromechanical Systems*,

Capítulo 13

Some Notions of (I, J) -Continuous functions and its relationships with others weak forms of Continuity

Ennis Rafael Rosas Rodriguez

Universidad de la Costa-Colombia y Universidad de Oriente-Venezuela.

E-mail: ennisrafael@gmail.com and erosas@cuc.edu.co

Abstract

The purpose of this conference is to introduce, study and characterize the (I, J) -continuous functions. Also, we investigate their relationships with other types of continuous functions.

All of us, recall the notion of continuous function $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ as well as the concept of ideal topological space, introduced by Kuratowski [7].

Recall that an ideal on a set X is a collection I of subsets of X satisfying the following conditions:

1. If $A \in I$ and $B \subseteq A$, then $B \in I$,
2. If A, B belongs to I , then $A \cup B \in I$.

The notion of local function of a subset A of a topological space (X, τ) was introduced by Vaidyanathaswamy [10] as follows: given a topological space (X, τ) with an ideal I on X and $P(X)$ the set of all subsets of X , a set operator $(.)^* : P(X) \rightarrow P(X)$, defined as for each $A \subseteq X$, $A^*(\tau, I) = \{x \in X / U \cap A \notin I \text{ for every } U \in \tau_x\}$, where $\tau_x = \{U \in \tau : x \in U\}$ is called the local function of A with respect to τ and I . The Kuratowski closure operator $cl^*(.)$ for a topology $\tau^*(\tau, I)$ called the $*$ -topology, finer than τ is defined by $cl^*(A) = A \cup A^*(\tau, I)$. We will denote $A^*(\tau, I)$ by A^* and $\tau^*(\tau, I)$ by τ^* . Note that when $I = \{\emptyset\}$, (respectively $I = P(X)$) $A^* = cl(A)$, (respectively $A^* = \emptyset$). In 1990, Jankovic and Hamlett [4] introduced the notion of I -open set in a topological space (X, τ) with an ideal I on X . In 1961, Levine [6] introduced and studied the weakly J -continuous. In 1990, Jankovic and Hamlett [4] introduced the notion of I -open set in a topological space (X, τ) with an ideal I on X . In 2005, Yüksel et al. [11] introduced, studied and investigated the $\theta_{(I, J)}$ -continuous functions. In 2012, Al-Omari et al. [1] investigated some properties of $\theta_{(I, J)}$ -continuous functions in ideal topological

spaces and its relations with another functions. In this conference, we continue with the study of the (I, J) -continuous functions on ideal topological spaces. Additionally, the relationships with others related functions are discussed. It is important to know that this conference is based on the results given in [9].

Palabras Clave: I -open set, $\theta_{(I,J)}$ -continuous functions, (I, J) -continuous functions

Bibliografía

- [1] A. Al-Omari and T. Noiri, *On $\theta_{(I,J)}$ -continuous functions*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **44** (2012),399-411.
- [2] D. R. Andrew and E. K. Whittlesy, *Closure Continuity*, Amer. Math. Monthly, **73**, (1966), 758–759.
- [3] E. Ekici and T. Noiri, **extremally disconnected ideal topological space* Acta Math. Hungar. **122** (2000: 81-90.)
- [4] D. S. Jankovic and T. R. Hamlett, *New Topologies From Old via Ideals*, Amer. Math. Monthly, **97**(4), (1990), 295–310.
- [5] N. Levine, *Semi open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, **70** (1963), 36-41.
- [6] N. Levine, *A decomposition of Continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, **68** (1961), 44-46.
- [7] K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, New York, 1966.
- [8] A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef, El-Deep, *on precontinuous and weak precontinuous mappings*, Proced. Phys. Soc. Egyp, **53** (1982), 47-53.
- [9] E. Rosas, C. Carpintero and J. Sanabria. *A note on (I, J) -continuous functions*, Bol. Paran. Math. **43** (2025: 1-5.)
- [10] R. Vaidyanathaswamy, *The localisation theory in set topology*, Proc. Indian Acad. Sci., **20** (1945), 51-61.
- [11] F. Yüksel, A. Aqikgoz and T. Noiri, *On δ - I -Continuous functions*, Turkish J. Math., **29** (2005), 39-51.

Capítulo 14

Foliations raised by quadratic-like polynomial submersions on the real plane and a sharp result on the real Jacobian conjecture

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

IMC-UNIFEI, Brazil

E-mail: isofia@unifei.edu.br

Resumen

The main goal of this talk is to present both local and global properties of planar foliations whose leaves are the connected components of the fibers of polynomial submersions that are of degree 2 in one of the variables. As an application of this geometric study, we establish the following result concerning the so-called *real Jacobian conjecture* in \mathbb{R}^2 : it holds true when one of the coordinate functions has degree 2 in one of the variables. More precisely, we prove that

A polynomial map $F = (p, q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with nowhere zero Jacobian determinant is globally injective provided that p is a polynomial of degree at most 2 in one of the variables.

This is a sharp result since there exists a non-injective polynomial map F with nowhere-vanishing Jacobian determinant for which p has degree 3 in one of the variables.

Joint with Francisco Braun (UFSCar – Brazil) and Filipe Fernandes (UnDF – Brazil)

Keywords: Regular foliation, topological classification, global injectivity.

Capítulo 15

Formulación, deducción e implementación de métodos runge-kutta-nyström implícitos de alto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Jorge Eliécer Ospino Portillo

Universidad del Atlántico
Universidad Nacional Abierta y a Distancia
E-mail: joreliospo@gmail.com
jorgeospino@mail.uniatlantico.edu.co

Juan Diego Teherán Olmos

Universidad del Norte
E-mail: jdteheran@uninorte.edu.co

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo principal deducir y construir un método Runge-Kutta-Nyström implícito de alto orden. Para llegar a esto primero hacemos un repaso de los conceptos básicos de una ecuación diferencial y sistemas de ecuaciones diferenciales al igual que de los métodos numéricos. Posterior a ello, estudiamos más a fondo los métodos numéricos Runge-Kutta. Abordamos temas de orden, series de Butcher, arboles monótonamente ordenados, hipótesis simplificadoras y construcción de los métodos RK tanto explícito como implícito. Una vez cumplido esto, nos enfocaremos en introducir los métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN). Su función principal es resolver numéricamente ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Estudiamos la convergencia global, las condiciones de orden, la representación gráfica de las derivadas sucesivas, las hipótesis simplificadoras de estos métodos, para posteriormente junto con todas las herramientas recolectadas realizar la construcción del método implícito. Por último, se realizan experimentos numéricos con los métodos RKN ya publicados para contrastarlos con los resultados obtenidos con el método construido y de esa forma evaluar su comportamiento.

Bibliografía

- [1] E. Hairer, S. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [3] A. de Iaco Veris, *Practical Astrodynamics*, Springer Aerospace Technology, Springer International Publishing, 2017.
- [4] A. G. Garrosa, *Métodos numéricos tipo Runge-Kutta-nyström para la integración eficiente de problemas oscilatorios*, PhD thesis, Universidad de Valladolid, 2001.
- [5] J. M. F. García and I. Gómez, *Sobre la construcción de métodos runge-kutta-nyström explícitos ajustados exponencialmente y de orden alto*, Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, no. 33, pp. 71(93), 2010.

Capítulo 16

Dinámica poblacional de abejas melíferas y parasitoides: un enfoque mediante sistemas de ecuaciones diferenciales suaves por tramos

Carlos Andrés Trujillo-Salazar

Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt

E-mail: ctrujillo@cue.edu.co

Oscar Emilio Molina-Díaz

Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt

E-mail: omolina5@cue.edu.co

Resumen

Las abejas melíferas (*Apis mellifera*) son fundamentales para la estabilidad de los ecosistemas y la seguridad alimentaria, pues participan en la polinización de cerca del 75 % de los cultivos de interés agrícola a nivel mundial [1, 4]. Además, aportan significativamente a la economía rural mediante la producción de miel y derivados, constituyéndose en bioindicadores del equilibrio ambiental. Sin embargo, en las últimas décadas se ha reportado un declive alarmante en sus poblaciones, fenómeno que amenaza tanto la biodiversidad como la sostenibilidad agrícola.

Entre las causas principales de esta disminución se destacan los parasitoides y patógenos que afectan su desarrollo, longevidad y comportamiento. El ácaro *Varroa destructor* es considerado el principal ectoparásito de las colmenas, pues se alimenta de la hemolinfa de las abejas y actúa como vector de virus que debilitan las colonias [7]. No obstante, otras especies como el ácaro traqueal *Acarapis woodi* y los microsporidios del género *Nosema* también inciden de manera determinante en la dinámica poblacional [9, 10]. La coexistencia de múltiples parasitoides podría inducir transiciones dinámicas más ricas y comportamientos cualitativamente distintos en la población de abejas, cuya naturaleza se busca caracterizar mediante el enfoque de sistemas suaves por tramos [8].

El modelado matemático se ha consolidado como una herramienta esencial para comprender la dinámica hospedero-parasitoide, evaluar escenarios ecológicos y explorar estrategias de control [2, 6]. En particular, los sistemas de ecuaciones diferenciales suaves por tramos (PWS, *Piecewi-*

se-Smooth Systems) constituyen un marco teórico versátil para describir procesos biológicos que presentan comportamientos abruptos o dependientes de umbrales. Estos sistemas permiten representar, en un mismo modelo, distintas leyes dinámicas que actúan en regiones separadas del espacio de estados, facilitando el análisis de fenómenos de conmutación, zonas de deslizamiento y bifurcaciones no suaves que no pueden capturarse mediante formulaciones continuas tradicionales [5, 3]. Gracias a esta flexibilidad estructural, los PWS se convierten en una herramienta poderosa para estudiar interacciones ecológicas con respuestas discontinuas, como las que emergen en las poblaciones de abejas sometidas a infestaciones variables o a controles sanitarios dependientes de umbrales.

En esta ponencia se presentan los avances de un proyecto de investigación teórica orientado a proponer y analizar modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales suaves por tramos que describen la interacción entre abejas melíferas y diferentes tipos de parasitoides. El estudio contempla la formulación de modelos originales para *Varroa destructor* y *Nosema* spp., el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio, así como simulaciones computacionales implementadas en MATLAB que ilustran la evolución de las poblaciones bajo distintos escenarios de infestación. Estas simulaciones permiten, además, realizar comparaciones cuantitativas entre los escenarios modelados, identificando diferencias en la dinámica poblacional asociadas a cada tipo de parasitoide y su intensidad de afectación. Los resultados teóricos y numéricos constituyen una contribución a la comprensión del impacto diferencial de los parasitoides sobre las colmenas, fortaleciendo la investigación en matemática aplicada a problemas ecológicos y proporcionando una base conceptual para futuras estrategias de conservación apícola.

Palabras Clave: modelación matemática, abejas melíferas, parasitoides, sistemas dinámicos suaves por tramos, bifurcaciones.

Bibliografía

- [1] Atanasov, A., Georgiev, S. G., & Vulkov, L. G. (2022). *Parameters reconstruction in modeling of honeybee colonies infested with Varroa destructor*. AIP Conference Proceedings, 2522(1).
- [2] DeGrandi-Hoffman, G., & Curry, R. (2004). A mathematical model of *Varroa mite* and honeybee population dynamics. *International Journal of Acarology*, 30(3), 259–274.
- [3] Di Bernardo, M., Budd, C., Champneys, A. R., & Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*. Springer.
- [4] FAO (2023). *Pollinators and sustainable agriculture*. Food and Agriculture Organization of the United Nations. Disponible en <https://www.fao.org/pollination>.
- [5] Filippov, A. F. (2013). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Springer.
- [6] Ibrahim, M. A., & Dénes, A. (2022). A mathematical model for the spread of *Varroa mites* in honey bee populations. *Heliyon*, 8(9).

-
- [7] Jack, C. J., de Bem Oliveira, I., Kimmel, C. B., & Ellis, J. D. (2023). Seasonal differences in *Varroa destructor* population growth in western honey bee colonies. *Frontiers in Ecology and Evolution*, 11, 1102457.
- [8] Karmakar, S., & Pal, N. (2024). Complex dynamical behaviors of a honeybee–mite model in parameter plane. *Physica D*, 468, 134300.
- [9] Muhammad, N., & Eberl, H. J. (2020). Two routes of transmission for Nosema infections in a honeybee population model with polyethism and time-periodic parameters. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 84, 105207.
- [10] Petric, A., Guzman-Novoa, E., & Eberl, H. J. (2017). A mathematical model for the interplay of Nosema infection and forager losses in honey bee colonies. *J. Biol. Dyn.*, 11(sup2), 348–378.

Capítulo 17

La incidencia de la demostración matemática en el razonamiento argumentativo de las y los profesores de Física

Juan Sebastian Luna Corredor

Universidad del Valle

E-mail: juan.sebastian.luna@correounivalle.edu.co

Resumen

En el marco del trabajo de grado en la Universidad del Valle, en la carrera de Licenciatura en Matemáticas, se desarrolla una investigación enfocada en el análisis histórico y epistemológico de algunos elementos de la demostración matemática que inciden en los procesos argumentativos de los futuros Licenciados en Física. Para abordar esta problemática, el trabajo tiene como objetivo la creación de una secuencia didáctica que permita evaluar la incidencia de la demostración matemática en dichos procesos argumentativos. Algunas características de la demostración matemática y la Física se presentan en autores como Arévalo (2016) [1] el cual identifica cuatro aspectos clave en la relación de matematización en los libros didácticos de Física universitaria: Modelización matemática en la ciencia, abstracción dentro del formalismo matemático, lenguaje adecuado, conocimiento de algunos formalismos matemáticos. Esto denota la importancia de una relación estructurada entre la Física y la matematización.

Se propone analizar tres momentos históricos relacionados con el contenido tratado: la medición de la Tierra realizada por Eratóstenes, la demostración de la segunda ley de Kepler y la reflexión de la luz a partir del principio de Fermat. Para ello, se construirá una representación intermedia que permita interpretar la demostración matemática en la estructura de su razonamiento, utilizando grafos con este propósito.

Duval (2017) [2] define la argumentación como un razonamiento, esto está directamente asociado a cómo los pensadores elegidos definen y estructuran la demostración matemática a través de la secuenciación de ideas. En este aspecto, el rol del argumento físico empleado en la demostración matemática, toma un rol fundamental para la modelación dentro de la demostración. Sin este aspecto, la construcción matemática carecería de validez.

Luna (2023) [3] presenta la propuesta de un modelo discursivo entre la interdisciplinariedad

entre astronomía y geometría, utilizando varios elementos de la Física, presentando la importancia del profesor de matemática en llevar un discurso científico al aula. En este caso particular, está directamente relacionado con el conocimiento profesional del profesor.

El análisis cualitativo de cada una de las demostraciones vislumbra una estructura interna de las mismas, las cuales fueron contrastadas, hallándose una estructura que puede considerarse general para aquellas demostraciones que emplean argumentos físicos. Esto, teniendo en cuenta que los argumentos físicos cumplen un papel esencial en la modelación matemática y, a su vez, las ideas matemáticas permiten abstraer información de los fenómenos físicos y simplificarlos. La estructura general consiste en: observación empírica, argumento físico, proposiciones, conjeturas y tesis.

Las observaciones empíricas funcionan como recolectoras de datos; esto está directamente relacionado con los argumentos físicos, que constituyen la interpretación teórica de los datos obtenidos. Al ser una ciencia fáctica, este rasgo en particular ubica a estas demostraciones en una categoría diferente a las demostraciones matemáticas usuales. Los argumentos físicos se vinculan con las conjeturas para validar y reconocer rasgos que, de no estar presentes, harían que la demostración careciera de validez. Las proposiciones, por su parte, se apoyan en los argumentos físicos para realizar la modelación matemática, pues los elementos construidos no son netamente abstractos. Finalmente, las conjeturas y las proposiciones cumplen el rol usual de las demostraciones matemáticas respecto a la tesis, que valida un hecho natural.

A lo largo del trabajo se evidenció una estrecha relación entre la estructura del razonamiento argumentativo y la construcción e interpretación de los fenómenos físicos. Dicha relación no es ingenua, pues la extrapolación de los análisis permitió identificar una estructura común en las demostraciones que integran ambos campos. Esta estructura resalta la importancia de la argumentación en los procesos de demostración matemática aplicados a la Física. Si bien la Física se sostiene como una ciencia independiente, los modelos y construcciones que posibilita la matemática constituyen un factor esencial en sus formas de razonamiento. En este contexto, la guía didáctica elaborada busca generar contrastes y recolectar datos para analizar la incidencia de estos procesos en la formación científica.

Palabras Clave: Demostración matemática, Modelación, Argumento Físico, Razonamiento, Argumentación.

Bibliografía

- [1] Arévalo, D. F. V., *Significados de matematización en la enseñanza de la física presentes en libros didácticos de física universitaria.*, *Tecné, Episteme y Didaxis: TED.*, 2016.
- [2] Duval, R., *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, *Programa Editorial Universidad del Valle.*, 2nd edición, 2017.
- [3] Luna Corredor, J. S., *Aproximación a la interdisciplinariedad entre astronomía y geometría en la educación matemática.*, *Praxis, Educación Y Pedagogía*, 2023.

Capítulo 18

Contextos realistas y cotidianos en la enseñanza del cálculo diferencial para ingeniería

Pablo Andrés Acosta Solarte

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

E-mail: paacostas@udistrital.edu.co

Resumen

Una de las preocupaciones en educación, en Colombia, tiene que ver con la falta de estudiantes en los colegios: *en los últimos seis años, 6.263 colegios de Colombia han cerrado sus puertas, de los cuales el 60.9 % eran públicos y el 29,1 %, privados* [4]. Vale destacar que muchos de ellos eran colegios reconocidos y con amplia trayectoria. En parte, consecuencia de ello, en las universidades ha disminuido la demanda en muchas carreras. En algunas ingenierías, por ejemplo, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas ha sido del 30 % aproximadamente [5].

Por otro lado, la pérdida de cursos y la deserción son significativamente altas en el país y en especial en cursos de ciencias básicas, aumentando la preocupación en educación superior. Entre los años 2000 y 2001, la tasa de deserción anual fue de aproximadamente el 11 % y mayor en algunas regiones del país [3]. De los estudiantes admitidos en la cohorte 2016, el 36.7 % había desertado después de 10 semestres. En promedio, solamente el 21.5 % de los admitidos se gradúan al semestre 10 de admitido y el 45.1 % se gradúa hasta el semestre 15 [3].

Los datos estadísticos conocidos en el país nos invitan a plantear posibles soluciones de trabajo en el aula que motiven e incentiven la permanencia de los estudiantes en las instituciones de educación superior. Esta propuesta de ponencia plantea maneras de desarrollo del cálculo diferencial y surge de una investigación llevada a cabo en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá, Colombia. Centró la atención en el estudiante de primer semestre de ingeniería y se planteó para buscar mantenerlo motivado por medio de la presentación de los temas del curso usando contextos realistas, cotidianos para él.

Por ejemplo, una función importante en cálculo diferencial es la función *parte entera*, o *función piso entero*, que suele definirse como la función *cuyo valor en cualquier número x es el mayor entero menor que o igual a x* , claramente la definición puede ser confusa para un estudiante de primer semestre. Con la propuesta, en lugar de entregarle al estudiante esa definición, se plantea

mostrarle inicialmente un contexto que él pueda comprender y de éste llegar a la función deseada: *El valor de una carrera en taxi se calcula teniendo en cuenta la distancia recorrida, el tiempo de espera y si va hacia o desde el aeropuerto entre otras variables. En Bogotá, para el año 2023, se cobraba \$104 por cada 100 metros recorridos y \$2900 como valor mínimo de una carrera. Supongamos que no tendremos en cuenta más que esas dos variables. Describamos el costo de la carrera en términos de la distancia recorrida.*

Se propone también que el desarrollo del curso de cálculo diferencial se apoye también en simulaciones realizadas con GeoGebra que permiten al estudiante comprender, por ejemplo, la variación de las magnitudes involucradas en algún proceso. Esta forma de presentar el curso deja ver al docente como agente de cambio del trabajo en el aula.

Es conocido que en educación básica y media nos preocupamos por presentar al estudiante nuevas metodologías que le ayuden a avanzar, pero quizás hemos dejado de lado el trabajo del aula en educación superior [2], [1]. Este trabajo es el inicio de un proceso completo en ingeniería. Su aplicación, en por lo menos dos semestres, en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad Tecnológica, deja ver que los estudiantes se estimulan al tratar contextos aplicados. Esta propuesta, que aunque surge de un proyecto de investigación, es de aplicación y evolución permanente.

Bibliografía

- [1] P. Acosta-Solarte, *Cálculo diferencial para ingeniería: buscando la motivación de los estudiantes*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Proyecto de investigación, 2024.
- [2] P. Acosta-Solarte, *Avances en la caracterización del desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de ingeniería en un contexto realista del cálculo multivariado en temas relacionados con superficies*, Universidad Antonio Nariño, Tesis Doctoral, 2022 <http://repositorio.uan.edu.co/handle/123456789/8104>
- [3] Laboratorio de Economía de la Educación (LEE) de la Pontificia Universidad Javeriana. *Informe No. 74 Deserción en la educación superior en Colombia*, 2023. Disponible en <https://lee.javeriana.edu.co/publicaciones-y-documentos>
- [4] M. Martínez Delgadillo, *¿Por qué se han cerrado 6.263 colegios en los últimos seis años en Colombia?*, 2025. <https://www.javeriana.edu.co/pesquisa/en-seis-anos-cerraron-6263-colegios/>
- [5] SNIES. (s.f.). Sistema Nacional de Información de la Educación Superior - SNIES. Recuperado el 11 de junio de 2025, del Ministerio de Educación Nacional: <https://snies.mineducacion.gov.co/portal/ESTADISTICAS/Bases-consolidadas/>

Capítulo 19

Stability, Convergence, and Homoclinic Classes in the Dynamics of the Hénon Map

Rafael Alvarez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

E-mail: rafael.alvarez@uptc.edu.co

Daniel Rojas

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

E-mail: Daniel.rojas14@uptc.edu.co

Raibel Arias

Universidade Federal de Maranhão

E-mail: raibel.jac@ufma.br

Resumen

We analyze the Hénon attractor for the classical parameter values $(a, b) = (1, 4, 0, 3)$ and establish its structural stability under small perturbations. Specifically, we prove that for (a', b') in a neighborhood of $(1, 4, 0, 3)$, the Hénon map preserves the trapping region N , and the associated attractor $\Lambda_{a', b'}$ varies continuously in the Hausdorff metric. For parameters $a > 3,844$ and $b = 0,3$, we construct a horseshoe on a non-square rectangular domain, extending known results. Using techniques from hyperbolic dynamics, we prove that this horseshoe forms a homoclinic class, linking it to the broader theory of chaotic invariant sets.

Let $f : M \rightarrow M$ a dynamical system,

Definition 1. A compact subset $\Lambda \subset M$ is called:

1. Invariant if $f(\Lambda) \subseteq \Lambda$.
2. Transitive if $\exists x \in \Lambda$ with $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = \Lambda$.
3. Trapping region if $f(\Lambda) \subset \text{Int}(\Lambda)$.

4. Attracting set if \exists trapping region N with

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(N).$$

5. Attractor if it satisfies both (iv) and (ii).

Definition 2. A compact invariant set Λ is hyperbolic if $\forall x \in \Lambda$:

1. $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$ (continuous splitting)
2. $Df_x E_x^{u/s} = E_{f(x)}^{u/s}$ (invariance)
3. $\exists C > 0, 0 < \lambda < 1$ such that $\forall n \geq 0$:

$$\|Df_x^n|_{E_x^s}\| \leq C\lambda^n \quad \text{and} \quad \|Df_x^{-n}|_{E_x^u}\| \leq C\lambda^n$$

The subspaces E_x^s and E_x^u are called the stable and unstable subspaces at x , respectively.

Definition 3. For a hyperbolic periodic orbit $\mathcal{O}(p)$, the homoclinic class is:

$$H_f(\mathcal{O}) := \overline{\{q \in M \mid W^s(\mathcal{O}) \cap^+ W^u(\mathcal{O}) \text{ at } q\}}$$

where \cap^+ denotes transverse intersection.

Definition 4 (Hénon Map). For parameters $a, b \in \mathbb{R}$, the Hénon map $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined by:

$$T_{a,b}(x, y) := (y + 1 - ax^2, bx) \tag{19.1}$$

Main Results

Theorem 1 (Parameter Stability). The Hénon attractor is stable for $(a_0, b_0) = (a, b) = (1, 4, 0, 3)$.

Theorem 2.

$$T_{a',b'}^n(N) \rightarrow \Lambda_{a,b},$$

as $n \rightarrow \infty$, in the Hausdorff metric.

Theorem 3. For $a > 3,844$ and $b = 0,3$, the set

$$H' = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} T_{a,b}^k(S')$$

is a Smale horseshoe. Where

$$S' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq R + \varepsilon, |y| \leq b(R + \varepsilon)\},$$

$$R = \frac{1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a},$$

is a fixed point of the one-dimensional logistic map related to Hénon, and $\varepsilon > 0$ is a sufficiently small constant to ensure the construction is well-defined.

Theorem 4. H' is a Homoclinic Class.

keywords Attractor set, stability, homoclinic class.

Bibliografía

- [1] R. Alvarez and R. Arias. The Plykin and Solenoid attractor are homoclinic classes. *Revista Colombiana de Matemáticas*. 57 (2023), 91-102.
- [2] S. Bautista. The geometric lorenz attractor is a homoclinic class. *Boletín de Matemáticas Nueva Serie, Volumen XI. No. 1* (2004), 68-78.
- [3] M. Benedicks And L. Carleson. The dynamics of the Henon map. *Annals of Mathematics*, 133 (1991), 73-169.
- [4] D. Fonseca Valero. Dinámica de la aplicación de Hénon. *Tesis de maestría en ciencias matemáticas. Universidad Nacional de Colombia-sede Bogotá*, 2019.
- [5] Wadia Faid Hassan Al-Shameri. Dynamical Properties of the Hénon Mapping. *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 6, 2012, no. 49, 2419 - 2430.
- [6] M. Hénon. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Commun. math. Phys.* 50, 69-77 (1976).
- [7] M. Lee. Measure-expansive homoclinic class for C^1 generic flows. *Mathematics*. 2020, 8(8), 1232.
- [8] S. Michael. Global stability of dynamical systems. *Springer-Verlag*. 1987.
- [9] L. Mora and N. Romero. Introducción a los sistemas dinámicos: via la aplicación de Hénon. *IMCA, Lima*. 2000.
- [10] Wadia Faid Hassan Al-Shameri. Dynamical Properties of the Hénon Mapping. *Department of Mathematics, Faculty of Applied Science Thamar University, Yemen* (2012).
- [11] C. Robinson. Dynamical systems - stability, symbolic dynamics and chaos. *CRC Press. Taylor & Francis Group*. 1999.
- [12] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967.
- [13] D. Yang and S. Gan. Expansive homoclinic classes. *Nonlinearity* 22 (2009). 729 - 733.

Capítulo 20

Estrategia lúdica para desarrollar el aprendizaje del concepto de plano cartesiano

Juan Carlos Arroyave
Universidad de Antioquia
E-mail: juanc.arroyave@udea.edu.co

Resumen

El plano cartesiano constituye una herramienta fundamental en la formación matemática universitaria, dado que permite representar, analizar y modelar situaciones geométricas y algebraicas. Sin embargo, diversos estudios han mostrado que muchos estudiantes de ingeniería ingresan con vacíos conceptuales significativos, especialmente en la ubicación de puntos, la comprensión de cuadrantes y la interpretación de gráficas. Estas dificultades fueron corroboradas mediante una prueba diagnóstica aplicada a estudiantes de primer semestre en la Universidad de Antioquia, donde se observaron errores frecuentes al identificar coordenadas y en la comprensión del plano como sistema de referencia. Además, se evidenció una actitud negativa hacia la asignatura, expresada en inseguridad y desmotivación.

Frente a este panorama, se diseñó un módulo educativo que busca transformar la enseñanza del plano cartesiano mediante la integración de estrategias lúdicas y creativas. El objetivo fue ofrecer experiencias de aprendizaje que, más allá de la repetición mecánica de ejercicios, fomentaran la motivación, la participación activa y la construcción de significados vinculados con contextos cercanos. Para ello, se articularon dinámicas de gamificación, retos colaborativos y actividades con recursos digitales interactivos. Un ejemplo de estas dinámicas fue el diseño de “retos de coordenadas”, en los que los estudiantes resolvían misiones grupales para ubicar puntos y construir trayectorias dentro de un plano virtual, promoviendo tanto la comprensión conceptual como el trabajo en equipo.

La metodología adoptada se enmarcó en la investigación-acción. En una primera fase se identificaron los vacíos y percepciones estudiantiles a través de la prueba diagnóstica y entrevistas cortas. Posteriormente, se implementaron actividades presenciales y virtuales, ajustadas a las

dificultades detectadas. Finalmente, se aplicó un proceso de evaluación mixta: de tipo cuantitativo, mediante el análisis de los resultados en ejercicios específicos, y cualitativo, a través de la observación y encuestas de percepción.

Los resultados evidenciaron una mejora significativa en la precisión al ubicar puntos y en la comprensión del sistema de coordenadas. Asimismo, se observó un cambio positivo en la actitud de los estudiantes hacia la asignatura: mayor disposición al trabajo colaborativo, confianza para enfrentar problemas y valoración del plano cartesiano como herramienta útil para otros temas del curso. Estos hallazgos coinciden con investigaciones previas que destacan el impacto de la gamificación y la creatividad en el aprendizaje matemático ([4]; [5]).

En conclusión, la experiencia desarrollada muestra que las estrategias lúdicas y creativas no solo refuerzan los aspectos conceptuales, sino que también transforman la relación afectiva de los estudiantes con las matemáticas. Se recomienda replicar y adaptar esta propuesta en otros cursos básicos de ingeniería, así como explorar tecnologías emergentes, como aplicaciones de realidad aumentada, que podrían ampliar las posibilidades de interacción con el plano cartesiano y fortalecer aún más la motivación estudiantil.

Palabras Clave: Conjunto flexible, conjunto bipolar flexible, conjunto bipolar rough flexible.

Bibliografía

- [1] Arias, J., *El juego como estrategia pedagógica en el aula: Un enfoque lúdico del aprendizaje.*, Editorial Académica Española., 2018.
- [2] Ausubel, D. P., *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.*, Trillas., 1983.
- [3] Ball, D. L., & Bass, H., *Mathematics teaching and learning: A guide for practitioners.*, Routledge., 2022.
- [4] Boaler, J., *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.*, Jossey-Bass., 2016.
- [5] Silva, L., & Morales, P., *Estrategias participativas y motivación estudiantil en matemáticas universitarias.*, *Revista de Educación Superior*, 50(2), 45–62, 2021.

Capítulo 21

Compacidad de la diferencia de dos operadores de composición con peso actuando en espacios de sucesiones $l^p(\omega)$

Compacidad de la diferencia de dos operadores de composición con peso actuando en espacios de sucesiones $l^p(\omega)$

Julio César Ramos Fernández

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

E-mail: jcramosf@udistrital.edu.co

Resumen

Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y sean $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. El operador de composición con peso y con símbolos φ y u se denota por $W_{\varphi,u}$ y es la transformación que aplica una sucesión $\mathbf{x} = \{x(n)\}$ en la sucesión

$$\mathbf{y} = W_{\varphi,u}(\mathbf{x}) := \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} \circ \varphi) = \{u(n) \cdot x(\varphi(n))\}.$$

Este operador se puede ver como la composición de dos transformaciones importantes: el operador de multiplicación M_u y el operador de composición C_φ . De hecho, cuando φ es la función identidad, $W_{\varphi,u}$ se convierte en M_u , y cuando $u(n) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, éste es justamente C_φ . Las propiedades de esos operadores actuando en espacios de sucesiones es un tema en pleno desarrollo tal como se puede ver en los artículos [3, 2] y en las referencias allí citadas.

En esta charla se establecen resultados sobre la continuidad y la compacidad del operador diferencia de dos composiciones con pesos $\Delta = W_{\varphi_1,u_1} - W_{\varphi_2,u_2}$, caracterizándola en función del comportamiento de Δ sobre las sucesiones canónicas. Se presentarán resultados recientes en esta línea, basados en [1].

Palabras Clave: Espacios de sucesiones, operador de composición con peso, compacidad.

Bibliografía

- [1] J. D. Cardona-Gutierrez, J. C. Ramos-Fernández and H. Vacca-González, “Compactness of the difference of weighted composition operators between weighted l^p spaces”, *Cubo, A Mathematical Journal*, Vol. 27, no. 1, pp. 119–133, 2025. doi: 10.56754/0719-0646.2701.119
- [2] J. D. Cardona-Gutierrez, J. C. Ramos-Fernández and M. Salas-Brown, “Fredholm weighted composition operators between weighted l^p spaces: A simple process point of view”, *Analysis*, vol. 44, no. 2, pp. 85-92, 2024. doi: 10.1515/anly-2022-1080.
- [3] C. Carpintero, J. C. Ramos-Fernández and J. Sanabria, “Weighted composition operators between two different weighted sequence spaces”, *Adv. Pure Appl. Math*, vol. 13, no. 2, pp. 29-42, 2022. doi: 10.21494/ISTE.OP.2022.0811.

Capítulo 22

Khovanov Homology at the Extremes

Gabriel Montoya Vega

University of Puerto Rico at Río Piedras

E-mail: gabriel.montoya@upr.edu

Abstract

Khovanov homology is a powerful link invariant: it assigns to each knot or link a collection of algebraic objects that reveal hidden information about its structure. In simple terms, it provides a way to distinguish knots and study their complexity using methods from algebra and topology.

One class of knots that plays an important role in this theory is called adequate links, first introduced by Lickorish and Thistlethwaite as a generalization of alternating links. Adequate links have gained attention in recent years, especially because of their connection to Khovanov homology. A diagram is said to be Khovanov-adequate if its associated chain complexes display non-trivial homology at both the highest and lowest quantum gradings—the two “extremes” of the spectrum. These non-trivial groups highlight essential topological features of the link.

In this talk, we will explore the notion of Khovanov homology, its construction, and relation to the idea of adequacy from a new perspective: through independence complexes, a combinatorial tool that helps us better understand the structure of Khovanov spectra.

Palabras Clave: knot theory, Khovanov homology, adequate links.

Bibliografía

- [1] L. Buchanan, H. Guo, G. Montoya-Vega, M. Silvero, Y. Rong, On the notion of Khovanov A-adequacy, *MATRIX Annals*. e-print: arXiv:2502.17637 [math.GT].
- [2] J. H. Przytycki, R. P. Bakshi, D. Ibarra, G. Montoya-Vega, D Weeks, Lectures in Knot Theory: An Exploration of Contemporary Topics, *Springer Universitext*, Springer International Publishing. 2024 March. DOI 10.1007/978-3-031-40044-5.

- [3] G. Montoya-Vega, An Initial Look to Knot Theory and Khovanov Homology, (Spanish), *Rev. Integr. temas mat.*, 41(2), 103–123. DOI 10.18273/revint.v41n2-2023003. e-print: arXiv:2308.10277 [math.HO].

Capítulo 23

Nuevas familias de polinomios tipo U -Fubini y sus aplicaciones en series de Fourier

Hernán David Ortega Castro

Universidad del Atlántico

E-mail: hortega@uniatlantico.edu.co

Alejandro Urieles

Universidad del Atlántico

E-mail: aurielles@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es introducir y estudiar una nueva familia de polinomios ortogonales denominada polinomios U -Fubini. Se presentan sus propiedades fundamentales, una forma explícita que permite describirlos de manera analítica y relaciones de la sucesión numérica. A partir de estos polinomios, se determina su serie de Fourier, la cual proporciona una herramienta eficaz para el análisis y aproximación de funciones periódicas. Finalmente, se muestran ejemplos de aproximación mediante series de Fourier construidas con los polinomios U -Fubini, destacando su potencial en el estudio de expansiones funcionales y métodos numéricos de aproximación.

A partir de (1), se puede observar que (cf. [5])

$$i \tan x = 1 - \frac{2}{e^{2ix} + 1}. \quad (2)$$

Además, nótese que

$$i \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = 1 - \frac{2}{e^{2ix} - 1} + \frac{4}{e^{4ix} - 1}. \quad (3)$$

De (3) se sigue que

$$\tan(-x) = -i + \frac{2i}{e^{-2ix} - 1} - \frac{4i}{e^{-4ix} - 1},$$

por lo tanto

$$x \tan(-x) = -ix + \frac{2ix}{e^{-2ix} - 1} - \frac{4ix}{e^{-4ix} - 1}.$$

Se sabe que la función parte entera $\lfloor x \rfloor$ se define por

$$\lfloor x \rfloor := \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Definición 1. Si γ es una curva cerrada y rectificable en \mathbb{C} , entonces, para $a \notin \gamma$,

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - a)^{-1} dz \quad (23.1)$$

se denomina el índice de γ con respecto al punto a . También se le conoce como el número de vueltas de γ alrededor de a .

Definición 2. Si G es un conjunto abierto, se dice que γ es homóloga a cero, y se denota por $\gamma \approx 0$, si $n(\gamma; w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus G$.

Teorema 1. Sea f una función analítica en la región G , excepto en las singularidades aisladas a_1, a_2, \dots, a_n . Si γ es una curva cerrada y rectificable en G que no pasa por ninguno de los puntos a_k y si $\gamma \approx 0$ en G , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n n(\gamma; a_k) \text{Res}(f; a_k). \quad (23.2)$$

Definición 3. El factorial descendente x de orden n es

$$\langle x \rangle_n := x(x-1) \cdots (x-n+1), \quad \langle x \rangle_0 := 1,$$

y el factorial ascendente x de orden n es

$$(x)_n := x(x+1) \cdots (x+n-1), \quad (x)_0 := 1.$$

El problema de encontrar una función de variable continua x que sea igual a $n!$ cuando $x = n$, siendo n un número entero, fue investigado por Euler. Supóngase que $x \geq 0$ y $n \geq 0$ son enteros. Se tiene

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n}. \quad (4)$$

Definición 4. Para todo número complejo $x \neq 0, -1, -2, \dots$, la función gamma $\Gamma(x)$ se define por

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^{x-1}}{(x)_k}. \quad (5)$$

De esta definición se sigue que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

Definición 5. La nueva familia de polinomios tipo U-Fubini $P_n(x)$ de grado n en $x \in \mathbb{N}$ está definida por la función generatriz

$$\frac{(\pi - e^z)(e^{xz})}{2 - e^{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \quad (23.3)$$

Palabras clave Polinomios U-Fubini; series de Fourier; aproximación.

Bibliografía

- [1] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer–Verlag, New York, 1976.
- [2] A. Bayad, *Fourier expansions for Apostol–Bernoulli, Apostol–Euler and Apostol–Genocchi polynomials*, *Mathematics of Computation*, 80(276) (2011), pp. 2219–2221.
- [3] C. B. Corcino y R. B. Corcino, *Fourier expansions for higher–order Apostol–Genocchi, Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials*, *Advances in Difference Equations*, 2020:346.
- [4] G. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Brooks/Cole, 1992.
- [5] T. Kim, *Euler numbers and polynomials associated with zeta functions*, *Abstract and Applied Analysis*, 2008, Article ID 581582.
- [6] H. Liu y W. Wang, *Some identities on the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials via power sums and alternate power sums*, *Discrete Mathematics*, 309 (2009), pp. 3346–3363.

Capítulo 24

Traslaciones y Dilataciones de algunos Subdiferenciales

Ramiro Peñas Galezo

Universidad del Atlántico

E-mail: ramiropenas@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

La teoría de operadores acretivos sobre espacios de Banach X garantiza la existencia y unicidad de soluciones $u \in L^1([0, T] : X)$ del problema no lineal de Cauchy $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, siempre que $A : X \Rightarrow X^*$ sea m -acretivo, y $f \in L^\infty([0, T] : X^*)$. En particular, para cada funcional $\varphi : X \rightarrow R$ convexo y semicontinuo inferiormente, su subdiferencial $\partial\varphi : X \Rightarrow X^*$ es m -acretivo. En esta presentación se muestran implicaciones referentes a traslaciones y dilataciones con dichos funcionales y sus subdiferenciales.

Palabras Clave: subdiferencial, m -acretivo, problema no lineal de Cauchy.

Bibliografía

- [1] Barbu V. (2010) *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer Verlag, New York.
- [2] Colli P and Visintin A. On a class of doubly nonlinear evolution equations. *Commun Partial. Differ Equ* 1990; 15: 737–756.
- [3] Colli P. On some doubly nonlinear evolution equations in Banach spaces. *Jpn J Ind Appl Math* 1992; 9: 181–203.
- [4] Roubíček T. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005. pp. 321-356.
- [5] Ekeland I, Témam R. (1999). *Convex analysis and variational problems*. Siam, Philadelphia.

-
- [6] Showalter R.E. (1997). *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. *Math Surv and Mon* 49.
- [7] Showalter R.E., Shi P. (1997). *Plasticity Models and Nonlinear Semigroups*. *Journal of mathematical analysis and applications* 216, pp 218-245.

Capítulo 25

De lo Clásico a lo aproximado: Conjuntos para modelar Incertidumbres

Alexander Gutiérrez Puche
Universidad Autónoma del Caribe

Resumen

La Teoría de Conjuntos Clásica, desarrollada en el siglo XIX por Georg Cantor (1874), constituye uno de los pilares fundamentales de la matemática moderna y ha sido clave en el desarrollo de áreas como la lógica matemática y la computación, donde permite modelar estructuras como relaciones, funciones, grafos y circuitos digitales. Sin embargo, los conjuntos crisp presentan limitaciones importantes al enfrentarse a fenómenos del mundo real, ya que solo permiten clasificaciones binarias, no consideran grados intermedios de pertenencia, dependen fuertemente del contexto y no distinguen adecuadamente entre incertidumbre, vaguedad e información incompleta.

Ante estas limitaciones surgen extensiones como los conjuntos difusos (Fuzzy Sets) [3], los conjuntos suaves (Soft Sets) [1] y los conjuntos aproximados (Rough Sets) [2]. Los conjuntos difusos, introducidos por Zadeh, permiten modelar la pertenencia gradual de los elementos mediante funciones de membresía, lo que resulta especialmente útil para representar conceptos lingüísticos imprecisos. Por su parte, los conjuntos suaves, propuestos por Molodtsov, incorporan parámetros flexibles que facilitan la toma de decisiones multicriterio sin requerir información adicional como funciones de pertenencia o relaciones de equivalencia. Finalmente, los conjuntos rough, desarrollados por Pawlak, abordan la incertidumbre derivada de datos incompletos mediante aproximaciones inferior y superior basadas en relaciones de indiscernibilidad.

El estudio comparativo de estos enfoques muestra cómo cada uno amplía el marco clásico para representar y procesar información imprecisa o incompleta, abriendo nuevas posibilidades de aplicación en áreas como la inteligencia artificial, la medicina, la toma de decisiones y el análisis de datos complejos.

Bibliografía

- [1] Molodtsov, D. (1999). "Soft Set Theory—First Results". *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- [2] Pawlak, Z. (1982). "Rough Sets". *International Journal of Computer & Information Sciences*, 11(5), 341-356.
- [3] Feng, F., et al. (2010). "Soft Sets Combined with Fuzzy Sets and Rough Sets". *Soft Computing*, 14(9), 899-911

Capítulo 26

Geometría y grafos: ¿Cuánto se necesita saber de una para entender a la otra en la educación secundaria?

Danilo Antonio Serpa Sánchez
Universidad del Atlántico
E-mail: daserpa@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

En esta presentación se reflexiona sobre la relación entre la geometría y la teoría de grafos en el contexto de la educación secundaria, resaltando el papel de la geometría como fundamento del razonamiento espacial, la visualización y el pensamiento lógico. A pesar de que la teoría de grafos constituye una de las áreas más relevantes de la matemática moderna, su presencia en los currículos escolares continúa siendo limitada.

La propuesta presenta una aproximación didáctica para introducir nociones básicas de teoría de grafos a partir de conceptos geométricos familiares para los estudiantes, tales como puntos, líneas, vértices y conexiones. Mediante actividades basadas en el trazado de figuras sin repetir segmentos, se promueve la comprensión intuitiva de ideas como camino, ciclo y conectividad, favoreciendo el tránsito progresivo hacia el pensamiento abstracto. Asimismo, se destaca el papel del docente en la formulación de preguntas orientadoras que permitan articular las experiencias prácticas con el lenguaje matemático formal.

Finalmente, se concluye que el fortalecimiento de las bases geométricas en los estudiantes de los grados octavo y noveno resulta esencial para una introducción significativa de la teoría de grafos, contribuyendo al desarrollo del pensamiento lógico, la resolución de problemas y el aprendizaje significativo.

Bibliografía

- [1] P. Lestón y C. Cecilia, *Estrategias para introducir la teoría de grafos en la escuela media*, s.f.
- [2] M. López, I. Fernández y M. Fernández, *Enseñar Geometría en Secundaria*, artículo, 2013.

- [3] T. Braicovich, *La geometría de los grafos o los grafos de los poliedros*, contribución a actas de congreso, 2010.
- [4] E. Cordero, *El proceso de enseñanza–aprendizaje de la geometría y sus dificultades*, trabajo de grado, 2020.

Capítulo 27

Algoritmo de la división en anillos cuadráticos

Mario Pineda Ruelas

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

E-mail: mpr@xanum.uam.mx

Resumen

En esta charla jugaremos con algunos anillos euclidianos como \mathbb{Z} y otros anillos de enteros cuadráticos. Veremos que es relativamente fácil calcular el cociente y el residuo. De acuerdo las construcciones que veremos, siempre se puede dividir y además, no siempre el cociente y el residuo son únicos. Si siempre se pudiera dividir tendríamos propiedades que en los mismos ejemplo no se cumplen. Tengo una pregunta: ¿siempre se puede dividir? Siguiendo los ejemplos que veremos, la respuesta es...siempre, pero la verdad es que no es así y no sé el por qué. Lo anterior pudiera tener implicaciones importantes en una de las conjeturas más célebres en teoría de números: la conjetura de Gauss. Aprovecharemos para mostrar el único ejemplo en donde se puede dividir y el cociente y residuo son únicos...y el ejemplo no es \mathbb{Z} .

Capítulo 28

Analiticidad de los exponentes de Lyapunov

Adriana Sánchez

Universidad de Costa Rica

E-mail: ADRIANA.SANCHEZ_C@ucr.ac.cr

Resumen

Una de las preguntas más importantes que surge al estudiar los exponentes de Lyapunov de cociclos lineales es el problema de regularidad. Con esto nos referimos al problema de comprender el comportamiento de los exponentes de Lyapunov con respecto a los datos subyacentes. Es un resultado clásico de Y. Peres [1] que, para una secuencia i.i.d. de matrices con distribución discreta, los exponentes de Lyapunov son localmente analíticos si se asumen condiciones de simplicidad moderadas. En esta charla abordaremos generalizaciones recientes del resultado de Peres al contexto del producto aleatorio de los cociclos cuasi-periódicos.

Bibliografía

- [1] PERES, Y. *Analytic dependence of Lyapunov exponents on transition probabilities* Lyapunov exponents Oberwolfach, 1990. 1991.

Capítulo 29

Uso de software libre en el estudio del comportamiento de la curva de secado de filetes de cerdo

Luis Enrique Mealla Sánchez
Universidad Autónoma del Caribe
E-mail: luis.mealla@uac.edu.co

Resumen

Se presenta el uso de software de uso libre como herramienta de ajuste para una curva de contenido de humedad relativa de filetes de cerdo obtenidas en un secador tipo gabinete de flujo forzado en condiciones ambientales de la costa Caribe de Colombia. Mediante del uso del programa de uso libre se comparó la curva experimental con trece modelos predictivos obteniendo los parámetros característicos de cada modelo a fin de generar una curva de ajuste con una planilla de cálculo para tiempos simultáneos a los experimentales. Se calculo los coeficientes de ajuste y se concluye que los más adecuados para d escribir el comportamiento de filetes de cerdo secados en esas condiciones son los de Dos términos exponenciales y Aproximación por difusión con coeficiente de correlación iguales a 0,9984 y 0,9986 respectivamente.

Palabras Clave: Secado solar, modelos predictivos, GeoGebra.

Bibliografía

- [1] Belessiotis, V., Delyannis, E. Solar drying. Solar Energy 85 (8), pp. 1665-1691, (2011).
- [2] [2] Chavan, b. r.; yakupitiyage, a.; kumar, s. Mathematical modeling of drying characteristics of Indian mackerel (*Rastrilliger kangurta*) in solar-biomass hybrid cabinet dryer. Drying Technology, 2008, vol. 26, no 12, p. 1552-1562.
- [3] [3] Villalba Vidales, Jorge Armando, y Arzola de la Peña Nelson. "Modelos matemáticos y experimentales sobre el secado de biomasa. Ingeniería y Desarrollo, vol. 33, no. 2, 2015, pp.301-330.

Capítulo 30

La realidad virtual como nuevo escenario para aprender geometría 3D: contrastes con GeoGebra y material concreto

Luis Felipe Parra Molina
Universidad Pedagógica Nacional
E-mail: lfparram@upn.edu.co

Resumen

El presente trabajo expone los resultados de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Su propósito fue analizar las experiencias, estrategias y comprensiones que emergen al desarrollar una tarea de geometría tridimensional en tres ambientes diferenciados: material concreto, GeoGebra 3D y NeoTrie VR. El estudio se enmarca en la metodología del *experimento de enseñanza* propuesta por Camargo (2021), que articula las fases de diseño, implementación y análisis de una situación de aula orientada a la reconstrucción del conocimiento matemático en contexto.

La tarea diseñada buscó favorecer la identificación de los elementos constitutivos de los poliedros (vértices, aristas y caras) y la formulación de conjeturas relacionadas con el teorema de Euler. En el ambiente de material concreto, los estudiantes trabajaron con estructuras físicas, enfrentando limitaciones derivadas del peso, la estabilidad y la precisión de las construcciones. En GeoGebra 3D, la manipulación digital permitió mayor control y exactitud, aunque persistieron dificultades para interpretar la tridimensionalidad en una pantalla bidimensional. En contraste, el entorno de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR generó una interacción corporal y perceptiva más completa, posibilitando que los estudiantes manipularan objetos en el espacio, visualizaran relaciones y escribieran en el entorno tridimensional.

La experiencia evidenció un cambio en la relación de los estudiantes con el objeto geométrico: de observadores externos pasaron a constructores activos del espacio. Coincidiendo con lo planteado por Rodríguez, Romero y Codina (2021), la manipulación sensoriomotora que ofrece la realidad virtual propicia la comprensión integral de las formas tridimensionales, al permitir actuar directamente sobre ellas y observar los efectos de cada acción en tiempo real. Del mismo

modo, los hallazgos se alinean con Moral-Sánchez, Sánchez-Compañá y Romero (2023), quienes destacan la capacidad de los entornos inmersivos para potenciar la visualización espacial y reducir errores conceptuales en el reconocimiento de poliedros.

El análisis comparativo permitió reconocer que cada ambiente promueve distintas formas de aprendizaje: el material concreto potencia la coordinación y la cooperación; GeoGebra favorece la precisión analítica; y la realidad virtual amplía la percepción espacial y la motivación. En concordancia con Rodríguez (2024), la incorporación de NeoTrie VR supone una oportunidad pedagógica para repensar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva experiencial y tecnológica, donde el cuerpo, el espacio y la acción se integran en la construcción del conocimiento matemático.

Este experimento de enseñanza muestra que la realidad virtual, más que reemplazar los recursos tradicionales, los complementa y amplía, abriendo un nuevo escenario para el aprendizaje significativo de la geometría tridimensional en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Palabras Clave: Realidad virtual, Geometría tridimensional, GeoGebra, Material concreto, Enseñanza de la geometría, Innovación educativa.

Bibliografía

- [1] Camargo Uribe, L. (2021). *El experimento de enseñanza: una metodología para la investigación en educación matemática*. Universidad Pedagógica Nacional.
- [2] Rodríguez, J. L., Romero, I., & Codina, A. (2021). The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry. *Mathematics*, 9(19), 2411. <https://doi.org/10.3390/math9192411>.
- [3] Rodríguez, J. L. (2022). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. In P. R. Richard et al. (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 245–264). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15.
- [4] Rodríguez, J. L. (2024). Virtual reality in the classroom: A difficult but exciting adventure for teachers and students. *Frontiers in Education*, 9, 1294715. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1294715>.
- [5] Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañá, M. T., & Romero Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125–147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>.

Capítulo 31

Métodos Numéricos para un Modelo Acoplado de Dinámica de células Cancerígena

Ricardo Prato

Universidad de Antioquia

E-mail: ricardo.prato@udea.edu.co

Resumen

En este trabajo se desarrolla un esquema completamente discreto para un modelo matemático acoplado que describe la dinámica de células cancerígenas. El modelo está conformado por un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales no lineales que representan la evolución de la densidad de células cancerígenas, la matriz extracelular y las enzimas responsables de la degradación de dicha matriz. En el planteamiento se incorporan efectos biológicos relevantes como la proliferación celular, la haptotaxis, la interacción célula–matriz y la producción de enzimas degradadoras, así como la consecuente degradación de la matriz extracelular.

Para la obtención del esquema numérico se emplea el método de Galerkin discontinuo en la discretización temporal, utilizando polinomios de grado r , combinado con un método de elementos finitos para la discretización espacial. Además, se lleva a cabo un análisis de error residual *a posteriori* que permite evaluar la precisión de las aproximaciones numéricas obtenidas. Finalmente, se presentan resultados numéricos que corroboran los resultados teóricos y evidencian la efectividad del método propuesto.

Palabras clave: Dinámica de células cancerígenas; elementos finitos; método de Galerkin discontinuo; análisis de error *a posteriori*.

Bibliografía

- [1] S. C. Alley, X. Zhang, N. M. Okeley, M. Anderson, C.-L. Law, P. D. Senter y D. R. Benjamin, *The pharmacologic basis for antibody–auristatin conjugate activity*, Journal of Pharmacology and Experimental Therapeutics, 330 (2009), pp. 932–938.

-
- [2] A. R. A. Anderson, M. A. J. Chaplain, E. L. Newman, R. J. C. Steele y A. M. Thompson, *Mathematical modelling of tumour invasion and metastasis*, Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2 (2000), p. 26.
- [3] D. A. Beard y J. B. Bassingthwaite, *Modeling advection and diffusion of oxygen in complex vascular networks*, Annals of Biomedical Engineering, 29 (2001), pp. 298–310.
- [4] J. K. Burton, D. Bottino y T. Secomb, *A systems pharmacology model for drug delivery to solid tumors by antibody–drug conjugates*, The AAPS Journal, 22 (2020).
- [5] C. A. Cilliers et al., *Multiscale modeling of antibody–drug conjugates*, The AAPS Journal, 18 (2016), pp. 1117–1130.
- [6] R. Erban y S. J. Chapman, *Stochastic Modelling of Reaction Diffusion Processes*, Cambridge University Press, 2020.
- [7] K. Eriksson y C. Johnson, *Adaptive finite element methods for parabolic problems I*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 28 (1991), pp. 43–77.
- [8] A. Logg, K.-A. Mardal y G. N. Wells, *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, Springer, 2012.
- [9] J. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2011.
- [10] R. P. Torres, C. Domínguez y S. Díaz, *An adaptive finite element method for a time-dependent Stokes problem*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 35 (2019), pp. 325–348.

Capítulo 32

La investigación en educación matemática y sus paradigmas: un análisis en la enseñanza de las matemáticas contextualizadas

Teovaldo García Romero

Universidad Popular del Cesar

E-mail: teovaldogarcia@unicesar.edu.co

Ingris Patricia Trespalacios Buelvas

Universidad Popular del Cesar

E-mail: itrespalacios@unicesar.edu.co

Resumen

Este artículo examina la relación entre los paradigmas de investigación en Educación Matemática (EM), y la implementación en la enseñanza, basada en situaciones contextualizadas. Se argumenta que la investigación eficaz en este ámbito debe ir más allá de los enfoques puramente positivistas para abordar la complejidad de los significados y las prácticas socioculturales. Se analizan los paradigmas positivista, interpretativo y sociocrítico en función de su aplicación al estudio de la contextualización (como la Modelación Matemática o la Etnomatemática), y se propone una triangulación de categorías analíticas para una comprensión más profunda de los fenómenos didácticos. Referencias recientes de autores como (Prediger, Dede, & Lesh, 2020), (Gutiérrez & Botero, 2021) y (Skovsmose, 2020), refuerzan la necesidad de enfoques cualitativos y críticos.

Palabras Clave: Educación Matemática, Paradigmas de Investigación, Enseñanza Contextualizada, Modelación Matemática, Sociocrítica, Interpretativa, Etnomatemática, Diseño de Investigación.

Bibliografía

- [1] Blum. (2011). Can Modelling be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 157-170). Springer. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 157-170). Springer., 157-170.
- [2] Brousseau. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990*. Springer Science & Business Media. *Didactique des Mathématiques, 1970–1990*. Springer Science & Business M, 1970–1990.
- [3] D´Ambrosio. (2006). *Etnomatemática: Eslabones entre las tradiciones y la modernidad*. Attleboro, MA: Plural Editores. Brasilia: Attleboro, MA: Plural Editores.
- [4] Duval. (2017). *Vision y manera de ver las matemáticas*. Ediciones Universidad del Valle. Cali: diciones Universidad del Valle.
- [5] Gee. (2014). *An Introduction to Discourse Analysis: Theory and Method* (4th ed.). Routledge. Madrid: (4th ed.). Routledge.
- [6] Gutiérrez, & Botero. (2021). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (Vol. I). Sense Publishers. Present and Future (Vol. I). Sense Publishers., 34-49.
- [7] Prediger, Dede, & Lesh. (2020). Designing and Evaluating Contextualized Learning Environments. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 453-472). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 453-472). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)., 4453-4472.
- [8] Skovsmose. (2020). Critical Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 195-198). Springer. Madrid: *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 195-198). Springer.
- [9] Yackel, & Cobb. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. . *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477, 27(4), 458-477.

Capítulo 33

Modelos Cuantílicos Inflados para Datos Proporcionales: Una Extensión desde la Distribución Hazard Proporcional Unitaria

Eilen Patricia Espitia Ramos

Universidad de Córdoba

E-mail: eespitariamos03@correo.unicordoba.edu.co

Roger Jesús Tovar Falón

Universidad de Córdoba

E-mail: rjtovar@correo.unicordoba.edu.co

Resumen

Este trabajo propone una extensión cuantílica de los modelos basados en la distribución Hazard Proporcional para el análisis de datos acotados en el intervalo $(0,1)$ que presentan inflación en los extremos cero y uno. A diferencia de los modelos clásicos centrados en la media condicional, la regresión cuantílica permite caracterizar distintos niveles de la distribución de la variable respuesta, ofreciendo una descripción más completa de la heterogeneidad, asimetría y dispersión de los datos.

Metodológicamente, el modelo combina una estructura mixta continuo-discreta, en la cual la parte discreta describe la probabilidad de ocurrencia de ceros y unos estructurales mediante un esquema logístico multinomial, y la parte continua modela las observaciones dentro del intervalo $(0,1)$ a partir de una distribución Hazard Proporcional Unitaria. La formulación incorpora una función de enlace logit, que garantiza la coherencia de las predicciones dentro del rango unitario, y mantiene las propiedades de regularidad e identificabilidad demostradas en el marco de los modelos inflados originales.

La inclusión del enfoque cuantílico amplía la capacidad del modelo al permitir analizar el efecto de las covariables sobre diferentes cuantiles de la distribución condicional de la respuesta, en lugar de limitarse al valor medio. Esto proporciona una herramienta robusta y flexible para estudiar el comportamiento de variables proporcionales, tasas o índices con exceso de observaciones en los extremos.

El modelo propuesto tiene aplicaciones potenciales en diversos ámbitos del conocimiento, como la biomedicina (porcentaje de éxito terapéutico o proporción de tejido afectado), la economía (niveles de inversión o participación), la educación (tasas de aprobación o deserción) y el medio ambiente (porcentaje de cobertura vegetal o áreas degradadas).

En conjunto, esta propuesta extiende el marco de los modelos Hazard Proporcional Inflados hacia una formulación cuantílica generalizada, constituyendo una contribución metodológica innovadora para el análisis de datos acotados con inflación en los extremos, comunes en múltiples contextos empíricos.

Palabras Clave: Distribución Hazard proporcional unitaria, datos acotados en $(0, 1)$, inflación cero-uno, modelo de mezcla continuo-discreto.

Bibliografía

- [1] G. Martínez-Flórez, R. Tovar-Falón, and H. W. Gómez, “Mathematical Formalization and Applications to Data with Excess of Zeros and Ones of the Unit-Proportional Hazard Inflated Models,” *Mathematics*, vol. 12, no. 22, 3566, 2024.
- [2] G. Martínez-Florez, G. Moreno-Arenas, and S. Vergara-Cardozo, “Properties and inference for proportional hazard models,” *Revista Colombiana de Estadística*, vol. 36, no. 1, pp. 95–114, 2013.

Capítulo 34

Diseño personalizado de teselaciones centroidales de Voronoi

Juan Sebastián Castaño Franco

Universidade de São Paulo

E-mail: jcastanof@unal.edu.co

Ernesto G. Birgin

Universidade de São Paulo

E-mail: egbirgin@ime.usp.br

Resumen

El diagrama de Voronoi ha sido objeto de estudio en muchos campos de la ciencia debido a la variedad de aplicaciones que puede tener. Una de especial interés es la teselación centroidal de Voronoi por sus aplicaciones en la generación óptima de mallas, la compresión de datos y las reglas de cuadratura óptimas para el cálculo de integrales, entre otras.

En este trabajo, nuestro objetivo es mostrar cómo construir teselaciones centroidales de Voronoi utilizando la teoría desarrollada por E. G. Birgin, A. Laurain y T. C. Menezes en su artículo “Sensitivity analysis and tailored design of minimization diagrams” utilizando algoritmos de optimización. Tras definir las funciones objetivo, calcular los gradientes y obtener las teselaciones de Voronoi centroidales, se presentan varios experimentos numéricos para generar estos diagramas con algunas propiedades específicas. El primero consiste en construir teselaciones de Voronoi centroidales con celdas de igual volumen, otro es para construir teselaciones de Voronoi centroidales con celdas que satisfacen condiciones sobre el tamaño relativo de sus aristas, y el último es para construir teselaciones de Voronoi centroidales con celdas de tamaños variables regidas por una función dada. Los experimentos muestran que es posible construir teselaciones centroidales de Voronoi personalizadas utilizando algoritmos de optimización bien establecidos y disponibles en el mercado.

Palabras Clave: Diagramas de Voronoi, teselaciones centroidales de Voronoi, optimización de formas no suaves.

Bibliografía

- [1] E. G. Birgin, A. Laurain y T. C. Menezes, *Sensitivity analysis and tailored design of minimization diagrams*, *Mathematics of Computation*, 92(344) (2023), pp. 2715–2768.
- [2] A. Henrot y M. Pierre, *Shape Variation and Optimization*, European Mathematical Society, 2018.
- [3] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3, Australian National University, 1983.
- [4] M. C. Delfour y J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, SIAM, 2011.
- [5] Y. Liu et al., *On centroidal Voronoi tessellation—energy smoothness and fast computation*, *ACM Transactions on Graphics*, 28(4) (2009), Article 101.
- [6] E. G. Birgin, J. M. Martínez y M. Raydan, *Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets*, *SIAM Journal on Optimization*, 10(4) (2000), pp. 1196–1211.
- [7] E. G. Birgin, J. M. Martínez y M. Raydan, *Algorithm 813: SPG—Software for convex-constrained optimization*, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27(3) (2001), pp. 340–349.
- [8] E. G. Birgin, J. M. Martínez y M. Raydan, *Spectral projected gradient methods: Review and perspectives*, *Journal of Statistical Software*, 60(3) (2014), pp. 1–21.
- [9] E. G. Birgin, J. M. Martínez y M. Raydan, *Spectral projected gradient methods*, en: *Encyclopedia of Optimization*, Springer, 2009, pp. 3652–3659.
- [10] B. Joe, *GEOMPACK—a software package for the generation of meshes using geometric algorithms*, *Advances in Engineering Software*, 13(5) (1991), pp. 325–331.
- [11] L. Schrage, *A more portable Fortran random number generator*, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 5(2) (1979), pp. 132–138.
- [12] G. F. Tóth, *A stability criterion to the moment theorem*, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 38 (2001), pp. 209–224.
- [13] P. M. Gruber, *Optimum quantization and its applications*, *Advances in Mathematics*, 186(2) (2004), pp. 456–497.
- [14] A. Gersho, *Asymptotically optimal block quantization*, *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(4) (1979), pp. 373–380.
- [15] M. Iri, K. Murota y T. Ohya, *A fast Voronoi-diagram algorithm with applications to geographical optimization problems*, en: *System Modelling and Optimization*, Springer, 1984, pp. 273–288.

-
- [16] B. Bogosel, G. Buttazzo y E. Oudet, *On the numerical approximation of Blaschke–Santaló diagrams using centroidal Voronoi tessellations*, ESAIM: M2AN, 58(1) (2024), pp. 393–420.
- [17] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu y J. Nocedal, *Algorithm 778: L-BFGS-B*, ACM Transactions on Mathematical Software, 23(4) (1997), pp. 550–560.
- [18] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal y C. Zhu, *A limited memory algorithm for bound constrained optimization*, SIAM Journal on Scientific Computing, 16(5) (1995), pp. 1190–1208.
- [19] H. Yang, M. Gunzburger y L. Ju, *Fast spherical centroidal Voronoi mesh generation*, Journal of Computational Physics, 367 (2018), pp. 235–252.
- [20] J. C. Hateley, H. Wei y L. Chen, *Fast methods for computing centroidal Voronoi tessellations*, Journal of Scientific Computing, 63(1) (2015), pp. 185–212.
- [21] F. Aurenhammer, *Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure*, ACM Computing Surveys, 23(3) (1991), pp. 345–405.

Capítulo 35

Introducción a la Geometría Convexa

Rafael Melo Jiménez

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

E-mail: rafael.meloj@konradlorenz.edu.co

Resumen

La geometría convexa constituye una de las ramas fundamentales del análisis geométrico moderno (ver [1]). Su estudio combina herramientas del álgebra lineal, el análisis y la topología, y tiene aplicaciones en campos como la optimización, la teoría de la medida y el análisis funcional. Este cursillo tiene como propósito ofrecer una introducción a los conceptos esenciales de los conjuntos convexos, y demostrar algunos de los resultados iniciales más relevantes de ellos, con el único requisito de que los participantes tengan conocimientos básicos en análisis real, álgebra lineal y topología general.

La primera parte del cursillo estará enfocada en la introducción de los conceptos básicos, como el de envolvente convexa, y la demostración de algunas de sus propiedades fundamentales, como el teorema de Carathéodory.

La segunda parte iniciará con el estudio de los hiperplanos, se demostrará el famoso teorema de separación de conjuntos convexos (ver [2]), y se presentarán las funciones asociadas a los conjuntos convexos tales como la función soporte, la función gauge y la función radial.

La tercera y última parte se ocupará de la topología en la familia de los cuerpos convexos n -dimensionales. Esto se hará por medio de la llamada métrica de Hausdorff (ver [3]), con la cual daremos sentido al concepto de continuidad y convergencia en dicha familia, concluyendo con el útil teorema de selección de Blaschke. Finalmente se destacarán algunos problemas abiertos y líneas de investigación actuales en el área, en particular el problema del hiperplano (ver [4]), uno de los temas centrales y aún no resueltos en la teoría de la distribución del volumen en cuerpos convexos.

Palabras Clave: conjunto convexo, envolvente convexa, métrica, hiperplanos, separabilidad.

Bibliografía

- [1] Hernández Cifre, M. de los Á., and Yepes Nicolás, J. (2022). Una introducción a la geometría convexa y discreta. Aula Magna Proyecto Clave / McGraw-Hill.
- [2] Padilla López, C. (2023). Teorema de Separación. Resultados equivalentes.
- [3] Wills, M. D. (2007). Hausdorff distance and convex sets. *Journal of Convex Analysis*, 14(1), 109.
- [4] Klartag, B. and Milman, V. (2022). The slicing problem by Bourgain. In *Analysis at large: Dedicated to the life and work of Jean Bourgain* (pp. 203-231). Cham: Springer International Publishing.

Capítulo 36

\mathcal{S} -aproximaciones flexibles y nociones asociadas

José Eduardo Sanabria

Universidad de Sucre

E-mail: jose.sanabria@unisucra.edu.co

Katherine Rojo Contreras

Universidad del Bío-Bío

E-mail: katherine.rojo2501@alumnos.ubiobio.cl

Merlys Monterroza Sierra

Universidad de Sucre

E-mail: merlysmonterroza19@gmail.com

Resumen

El concepto de \mathcal{S} -aproximación de un conjunto fue propuesto inicialmente por Hooshmandasl et al. [1] como una nueva clase de aproximación algebraica, útil para abordar problemas aplicados que no pueden modelarse mediante aproximaciones basadas en inclusión. La relevancia de este enfoque radica en que la teoría de conjuntos rough de Pawlak, junto con varias de sus generalizaciones, puede expresarse en términos de \mathcal{S} -aproximaciones. Además, dichas aproximaciones constituyen una herramienta eficaz para el análisis de sistemas de información independientes de la relación de inclusión.

Por otra parte, las aproximaciones flexibles fueron introducidas por Feng et al. [2] como una generalización del modelo de conjuntos rough de Pawlak, fundamentada en los conjuntos flexibles propuestos por Molodtsov en [1]. En este trabajo, presentamos las nociones de \mathcal{S} -aproximaciones flexibles, concebidas como una hibridación entre las \mathcal{S} -aproximaciones y las aproximaciones flexibles. Investigamos las principales propiedades de estas nuevas aproximaciones de un conjunto y demostramos que las \mathcal{S} -aproximaciones flexibles pueden aplicarse en contextos donde los modelos basados en inclusión, como los de Feng et al. [2], resultan insuficientes.

De igual manera, exploramos dos subclases de \mathcal{S} -aproximaciones flexibles, denominadas \mathcal{S}_M -aproximación flexible y \mathcal{S}_N -aproximación flexible, y demostramos que ambas conservan la mayoría de las propiedades de las aproximaciones flexibles tradicionales basadas en inclusión, aunque

no dependen necesariamente de dicha relación.

Palabras Clave: Espacio de \mathcal{S} -aproximación, espacio de aproximación flexible, \mathcal{S} -aproximación flexible.

Bibliografía

- [1] M. R. Hooshmandasl, A. Shakiba, A. K. Goharshady and A. Karimi, \mathcal{S} -approximation: A new approach to algebraic approximations, *Journal of Discrete Mathematics* 2014, Article ID 909684, 5 pages, 2014. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/909684>
- [2] F. Feng, X. Liu, V. Leoreanu-Fotea and Y. B. Jun, Soft sets and soft rough sets, *Information Sciences* 181(6), 1125-1137, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.11.004>
- [3] D. Molodtsov, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications* 37(4-5), pp. 19-31, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00056-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5)

Capítulo 37

Subdivisiones matroidales del permutaedro

Carolina Benedetti Velásquez

Universidad de los Andes

E-mail: c.benedetti@uniandes.edu.co

Resumen

El permutaedro es un poliedro que aparece de manera transversal en varias áreas de la matemática: álgebra, combinatoria, geometría. Una manera de describirlo es como la envolvente convexa de todas las permutaciones de n elementos. Sin embargo, también lo podemos construir sumando “politopos de matroides”. En esta charla abordaremos la siguiente pregunta: ¿podemos entender subdivisiones del permutaedro de manera que cada pieza sea la suma de ciertos politopos de matroides?

Capítulo 38

Estabilidad tipo Hurwitz de sistemas: un enfoque con la abscisa espectral

Carlos Arturo Loredó Villalobos

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco

E-mail: lvca@azc.uam.mx

Resumen

La abscisa espectral se define como la parte real más grande del espectro de una matriz. Juega un papel importante en el estudio de la localización de las raíces, además de que permite describir la estabilidad asintótica de un sistema dinámico lineal $\dot{x} = Ax$. Decimos que un sistema es Hurwitz estable, si todas las raíces se ubican en la mitad izquierda del plano complejo: \mathbb{C}^- . Existen varios criterios para determinar la estabilidad de un sistema, ver [1]. Un atributo asociado con el espectro $\mathcal{S}(A)$ de A es la abscisa espectral:

$$\alpha(A) = \max_{\lambda \in \mathcal{S}(A)} \operatorname{Re}(\lambda).$$

Para un sistema estable, la abscisa espectral estará en \mathbb{C}^- . La abscisa espectral desempeña un papel importante en la teoría de control porque también describe la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Es de interés obtener información de la abscisa sin tener que calcular explícitamente las raíces de la ecuación característica. Desde este enfoque, otra forma particular de caracterizar la estabilidad de un sistema es emplear métodos para verificar que: $\alpha(A) < 0$. Por esta razón, la abscisa espectral es también conocida como abscisa de estabilidad.

Algunos métodos numéricos matriciales que no requieren hallar explícitamente las raíces del polinomio característico y que permiten aproximar el valor propio dominante son: factorización de Gram-Schmidt y el método de la potencia. Algunas de sus desventajas son que las matrices deben ser diagonalizables o invertibles, y suelen fallar cuando hay multiplicidades.

Cuando la matriz A es de entradas constante pero de dimensión grande, determinar el valor de la abscisa espectral puede ser un proceso tedioso. Por otra parte, si la matriz del sistema $\dot{x} = Ax$ tiene entradas con incertidumbre o dependientes de parámetros (de control), es decir $A(q)$, donde $q \in \mathbb{R}^n$ varía en un conjunto cerrado y acotado, entonces la abscisa espectral es

más difícil de determinar exactamente. Existen algunos resultados que establecen cotas para la abscisa espectral en términos de los coeficientes del polinomio característico (ver [3, 4]).

La primera dificultad aparece en el polinomio característico, ahora p es una familia (paramétrica) de polinomios: $p(t, q)$. Dependiendo de la estructura de q , las familias más comunes son: bolas de polinomios, polinomios intervalo, segmentos de polinomios (ver [2]). Podemos ahora intentar determinar regiones de estabilidad de $A(q)$ minimizando α . Por lo tanto, el problema de estabilidad se transforma en un problema de optimización.

$$\begin{aligned} & \min_q \alpha(A(q)) \\ \text{sueto a: } & p(t, q) = 0. \end{aligned}$$

donde $p(t, q)$ es el polinomio característico del sistema. Si consideramos la abscisa como una función $\alpha(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\alpha(q)$ es una función que no puede ser minimizada por los métodos clásicos de optimización, pues dicha función no es convexa, no es suave y no es Lipschitz. Por lo que un enfoque para estimar su valor es mediante métodos de optimización no suave. Estas características de α plantean un reto para generar algoritmos de optimización.

Palabras Clave: polinomios Hurwitz, abscisa espectral, familias de polinomios, optimización no suave.

Bibliografía

- [1] B. Aguirre-Hernández, C.A. Loredó-Villalobos, C. A., E.C. Díaz-González, E. C., y E. Campos-Cantón, *Estabilidad de sistemas por medio de polinomios Hurwitz*, *Revista De Matemática: Teoría Y Aplicaciones*, 24(1), 61–77. <https://doi.org/10.15517/rmta.v24i1.27751>, 2017.
- [2] B. Aguirre Hernández, E. Campos Cantón, E.C. Díaz González y C.A. Loredó Villalobos, *Estabilidad de familias de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales*, *Tópicos Selectos de Matemáticas: Aportaciones en matemáticas 1*, Universidad Autónoma de Tlaxcala, pp. 213, 2016.
- [3] G. Schrack, G., *Lower Bounds to the Abscissa of Stability of a Stable Polynomial from Symmetric Functions*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **21**(3), 1971.
- [4] P. Henrici, *Upper Bounds for the Abscissa of Stability of a Stable Polynomial*, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **7**(4). 1970.

Capítulo 39

Exploración de la función espacio conformacional en moléculas con uno y dos ángulos de rotación

David Fernández Bueno

Universidad de La Guajira

E-mail: dfernandezb@uniguajira.edu.co

Rafael Ramiro Vega Brito

Universidad de La Guajira

E-mail: rvega@uniguajira.edu.co

Julio Deluque Gomez

Universidad de La Guajira

E-mail: jdeluque@uniguajira.edu.co

Resumen

El espacio conformacional de una molécula con uno o dos enlaces rotables puede verse como un paisaje de energía $E : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ con $d \in \{1, 2\}$, donde \mathbb{T}^d (toro d -dimensional) parametriza los ángulos diedros $(\theta_1, \dots, \theta_d)$ con periodicidad $\theta_k \sim \theta_k + 2\pi$. Sobre el dominio angular construimos subniveles

$$\Theta_r = \{\theta : E(\theta) \leq r\},$$

los cuales inducen una filtración y, mediante homología persistente (con coeficientes en un campo), cuantificamos la aparición y desaparición de componentes y ciclos robustos del paisaje energético (códigos de barras en H_0 , H_1 y H_2) [1, 2, 3, 4, 5]. En paralelo, cada conformación optimizada se codifica geoméricamente como un punto de \mathbb{R}^{3N} (con N átomos, tras cocientar por movimientos rígidos) y se comparan conformaciones mediante la distancia RMSD alineada, utilizando la rotación óptima de Kabsch [6, 7, 8]. La matriz de distancias resultante se proyecta en \mathbb{R}^3 mediante escalamiento multidimensional (MDS) clásico, obteniendo una incrustación que preserva, en promedio de mínimos cuadrados, dichas distancias y permite visualizar cuencas y transiciones coherentes con la topología de E sobre el toro.

Mostramos cómo ambas representaciones, angular y geométrica, se complementan: los mínimos y barreras en \mathbb{T}^d se reflejan como *clusters* y puentes en la proyección MDS de \mathbb{R}^{3N} , y los

números de Betti del dominio (por ejemplo, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ para $d = 2$) guían la lectura global del paisaje energético [9, 10, 11].

Público objetivo

Estudiantes avanzados y comunidad de matemática aplicada y computacional, química computacional y ciencia de datos. No se asume conocimiento previo de topología algebraica.

Palabras clave

Homología persistente; topología computacional; espacios conformacionales; RMSD (Kabsch); escalamiento multidimensional; subniveles; toro.

Modo de participación

Ponencia.

Área sugerida

Topología algebraica y computacional.

Referencias

Bibliografía

- [1] W. Kabsch, *A solution for the best rotation to relate two sets of vectors*, Acta Crystallographica A, 32 (1976), pp. 922–923.
- [2] W. Kabsch, *A discussion of the solution for the best rotation to relate two sets of vectors*, Acta Crystallographica A, 34 (1978), pp. 827–828.
- [3] J. C. Gower, *Some distance properties of latent root and vector methods used in multivariate analysis*, Biometrika, 53(3–4) (1966), pp. 325–338.
- [4] W. S. Torgerson, *Theory and Methods of Scaling*, Wiley, 1958.
- [5] T. F. Cox y M. A. A. Cox, *Multidimensional Scaling*, Chapman & Hall/CRC, 2nd edition, 2001.
- [6] I. Borg y P. J. F. Groenen, *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications*, Springer, 2nd edition, 2005.
- [7] H. Edelsbrunner, D. Letscher y A. Zomorodian, *Topological persistence and simplification*, Discrete & Computational Geometry, 28(4) (2002), pp. 511–533.

- [8] H. Edelsbrunner y J. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.
- [9] A. Zomorodian y G. Carlsson, *Computing persistent homology*, *Discrete & Computational Geometry*, 33 (2005), pp. 249–274.
- [10] T. A. Halgren, *Merck molecular force field. I. Basis, form, scope, parameterization, and performance of MMFF94*, *Journal of Computational Chemistry*, 17(5–6) (1996), pp. 490–519.
- [11] M. J. Frisch et al., *Gaussian 16, Revision C.01*, Gaussian, Inc., Wallingford CT, 2016.

Capítulo 40

Operadores de aproximación bipolar flexible

José Eduardo Sanabria

Universidad de Sucre

E-mail: jose.sanabria@unisucra.edu.co

Tania Feria Paternina

Universidad de Sucre

E-mail: paternina2626@gmail.com

Yisbelina Álvarez Balza

Universidad de Sucre

E-mail: yisbealvarez@gmail.com

Resumen

La teoría de conjuntos flexibles fue introducida por Molodtsov [1] en 1999 como una herramienta matemática para abordar problemas que involucran incertidumbre. Desde entonces, numerosos investigadores han empleado dicha teoría para desarrollar estudios en diversas direcciones, encontrando aplicaciones en una amplia gama de campos del conocimiento.

En particular, Shabir y Naz [2], en 2003, utilizaron la noción de conjunto flexible para definir los conjuntos bipolares flexibles, junto con las operaciones básicas de unión, intersección y complementación correspondientes a este tipo de conjuntos. Siguiendo esta línea de investigación, Karaaslan y Çağman [3] introdujeron los conceptos de aproximaciones P -inferiores positivas flexibles, P -inferiores negativas flexibles, P -superiores positivas flexibles y P -superiores negativas flexibles, considerando tanto un subconjunto del universo inicial como el complemento de dicho subconjunto. Además, definieron el concepto de conjunto bipolar rough flexible basado en estas aproximaciones y propusieron un método de toma de decisiones para seleccionar el elemento óptimo entre las alternativas disponibles.

En este trabajo, extendemos las nociones de operadores de aproximación bipolar flexible introducidas por Karaaslan y Çağman, definiendo nuevos operadores de aproximación bipolar flexible inspirados en las técnicas propuestas por Li et al. [4]. Específicamente, investigamos las principales propiedades de esta nueva clase de operadores de aproximación bipolar flexible y

analizamos su relación con los operadores previamente existentes en este marco teórico.

Palabras Clave: Conjunto flexible, conjunto bipolar flexible, conjunto bipolar rough flexible.

Bibliografía

- [1] D. Molodtsov, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications* 37(4-5), pp. 19-31, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00056-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00056-5)
- [2] M. Shabir and M. Naz, On bipolar soft sets, *arXiv* 1303.1344. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1303.1344>, 2013.
- [3] F. Karaaslan and N. Çağman, Bipolar soft rough sets and their applications in decision making, *Afrika Matematika* 29, pp. 823-839, 2018. <https://doi.org/10.1007/s13370-018-0580-6>
- [4] Z. Li, B. Qin, and Z. Cai, Soft rough approximation operator and related results, *Journal of Applied Mathematics* 2013, Article ID 241485, 15 pages, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/241485>

Capítulo 41

Soluciones (ω, Q) -periódicas de ecuaciones diferenciales semilineales con aplicaciones a redes neuronales tipo Hopfield

Stiven Díaz

Universidad de la Costa
E-mail: sdiaz47@cuc.edu.co

Resumen

En esta charla presentaré el problema de la existencia y unicidad de soluciones suaves (ω, Q) -periódicas para una clase de ecuaciones diferenciales semilineales en espacios de Banach. En particular, consideraremos ecuaciones de la forma

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde A es un operador lineal cerrado que genera un C_0 -semigrupo exponencialmente estable, y la parte no lineal f satisface ciertas condiciones de regularidad. Para abordar este problema, se emplea el principio de contracción de Banach. Como resultado principal, se establece además un criterio suficiente que garantiza la existencia y unicidad de soluciones suaves (ω, Q) -periódicas en este marco, con especial atención a sus aplicaciones en modelos de redes neuronales tipo Hopfield.

Esta charla se basa en un artículo realizado en colaboración con los doctores R. Grau y E. Álvarez (véase [2]).

Recordemos que las funciones (ω, Q) -periódicas fueron introducidas por Fečkan et al. [3] como una generalización de las funciones (ω, c) -periódicas (Álvarez et al. [1]) y de las funciones Q -afín-periódicas (Zhang et al. [4]). En términos precisos, una función $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ se denomina (ω, Q) -periódica si existe un par (ω, Q) tal que

$$h(t + \omega) = Qh(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}_+,$$

donde $\omega > 0$ y $Q : X \rightarrow X$ es un isomorfismo lineal.

Bibliografía

- [1] Álvarez, E., Gómez, A., Pinto, M.: (ω, c) -periodic functions and mild solutions to abstract fractional integro-differential equations. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 16, 2018 (2018).
- [2] Álvarez, E., Díaz, S., Grau, R.: (ω, Q) -periodic mild solutions for a class of semilinear abstract differential equations and applications to Hopfield-type neural network model. *Z. Angew. Math. Phys.* 74, 60 (2023).
- [3] Fečkan, M., Liu, K., Wang, J.: (ω, T) -periodic solutions of impulsive evolution equations. *Evol. Equ. Control Theory* 11(2), 415–437 (2022).
- [4] Zhang, Y., Yang, X., Li, Y.: Affine-periodic solutions for dissipative systems. *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 157140, 1–4 (2013).

Capítulo 42

Introducción a la inferencia bayesiana y algunas aplicaciones

Jose V. Barraza A.

Universidad del Atlántico

e-mail: josebarraza@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

La Regla de Bayes siempre se le atribuyó al Reverendo Thomas Bayes, matemático británico y ministro presbiteriano. Pero realmente quien la introdujo fue el científico Francés Pierre Simon Laplace, físico, matemático y astrónomo. La idea que motivó a estos científicos fue investigar que sucedía con la probabilidad condicional, cuando los parámetros son considerados variables aleatorias.

Existen muchas situaciones en las que no resulta tan evidente aplicar los enfoques denominados, clásicos y de frecuencia relativa. En el primero se decide un valor sobre la suposición de resultados equiprobables, como consecuencias de experimentos bajo las mismas condiciones y en el segundo se fundamenta en la realización de múltiples ensayos de un experimento, analizando la proporción de resultados que favorecen la ocurrencia de un evento particular; a esto se le denomina acercamiento experimental o empírico a la probabilidad. Pero aplicar estos enfoques a responder preguntas como, determinar la probabilidad de que dos empresas de ventas de combustibles se fusionen o que tan probable es que el inventario sobre un artículo deportivo aumente el siguiente mes, resultaría complicado responder satisfactoriamente. En esta charla daré a conocer como comparar la distribución de probabilidad a priori, con la distribución de probabilidad a posteriori y de como hacer una estimación bayesiana de una proporción.

Palabras Clave: Inferencia bayesiana, Parámetros, Distribución a priori, Distribución a posteriori, estimación bayesiana de una proporción.

Bibliografía

- [1] R.Hogg, A Craigh *Introduction to Mathematical Statistics, The Macmillan Company*, 3rd edition,1971.
- [2] R, Walpole; R. Myers; S. Myers *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias,Pearson*, Novena edition, 2012.
- [3] Nieves, A;Dominguez, F *Probabilidad y Estadística para ingeniería. Un enfoque moderno,Mc Graw Hill*, Primera edicion, 2010.

Capítulo 43

Un método numérico adaptativo de elementos virtuales para el cálculo de error a posteriori en el modelo de vibración de una placa delgada

Iván Darío Velásquez Ramos
Universidad Militar Nueva Granada
E-mail: ivan.velasquez@unimilitar.edu.co

Resumen

En esta charla presentamos el análisis y desarrollo de un método de elementos virtuales aplicado al problema de vibración de una placa delgada, modelada mediante las ecuaciones de Kirchhoff-Love en dos y tres dimensiones. El esquema discreto se obtiene a través de una formulación variacional conforme, utilizando funciones virtuales clase C^1 construidos sobre mallas poligonales y poliédricas. Se construye un estimador de error, para el cual se demuestra su confiabilidad y eficiencia. Concluimos la charla con una serie de ejemplos numéricos que evidencian el rendimiento óptimo del método en dos y tres dimensiones.

Producto derivado del proyecto INV-CIAS-4167 financiado por la Universidad Militar Nueva Granada - Vigencia 2025.

Problemas modelo

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) un dominio acotado, simplemente conexo y con frontera de clase Lipschitz, cuya frontera denotamos por $\Gamma := \partial\Omega$. La deflexión $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y la frecuencia de vibración $\omega > 0$ satisfacen el siguiente problema de autovalores, donde $\lambda = \omega^2$.

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u, & \text{en } \Omega, \\ \mathcal{B}^j u = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (43.1)$$

donde $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$ denota el operador biarmónico de cuarto orden. También introducimos la matriz Hessiana, que contiene todas las derivadas parciales de segundo orden de u , y se denota

por $\nabla^2 u$. Consideramos dos tipos de condiciones de contorno homogéneas:

- **Placa simplemente apoyada (SSP):**

$$\mathcal{B}^j u := \Delta^{j-1} u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (43.2)$$

- **Placa empotrada (CP):**

$$\mathcal{B}^j u := \partial_{\mathbf{n}}^{j-1} u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad \text{para } j = 1, 2. \quad (43.3)$$

Resultados principales

Teorema 2. (Confiabilidad:) *Existe una constante positiva independiente del parametro de discretización h , tal que:*

$$|\lambda - \lambda_h| \leq C(\text{Estimador})^2$$

Teorema 3. (Eficiencia) *Existe una constante positiva independiente del parametro de discretización h , tal que:*

$$(\text{Estimador})^2 \leq C(\text{error de aproximación})^2$$

Una pequeña muestra de los resultados que se presentarán en la charla:

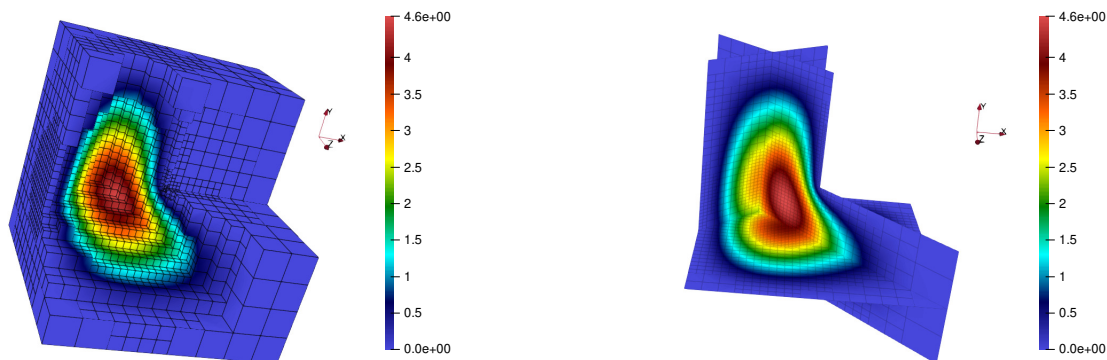


Figura 43.1: Autofunción aproximada $u_{1,h}$ en el cubo de Fichera tras 14 refinamientos adaptativos.

Palabras Clave: A posteriori error, virtual element method, eigenvalue problem, vibration plate.

Bibliografía

- [1] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. D. Marini and A. Russo, Basic principles of virtual element methods, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01), pp. 199-214.

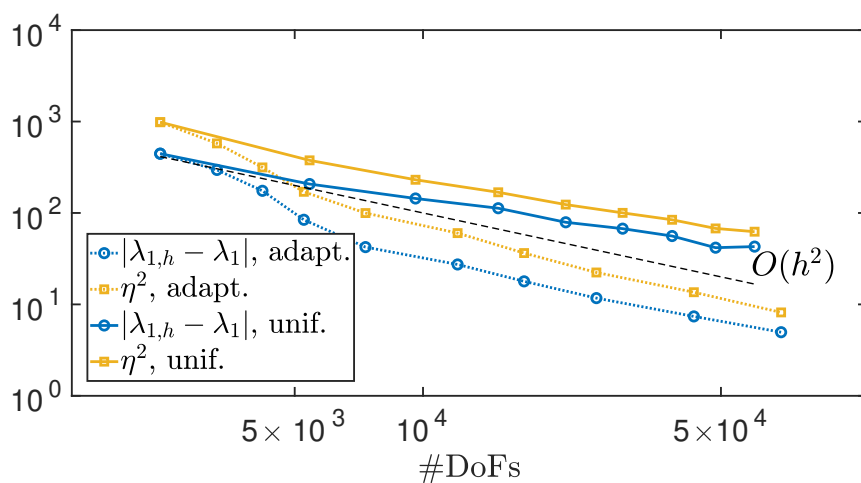


Figura 43.2: Comportamiento del estimador global de error η para el primer autovalor λ_1 en el dominio en forma de L .

- [2] F. Dassi and I. Velásquez, Virtual element method on polyhedral meshes for Bi-harmonic Eigenvalues Problems, *Comput. Math. Appl.* 121, pp. 85–101, 2022.
- [3] F. Dassi, A. Rubiano, and I. Velásquez, A posteriori error estimates for a C^1 virtual element method applied to the thin plate vibration problem, *arXiv:2507.06846* <https://arxiv.org/abs/2507.06846>.
- [4] D. Mora, G. Rivera and I. Velásquez, A virtual element method for the vibration problem of Kirchhoff plates, *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 52(4), pp. 1437–1456, 2018.
- [5] M. Chen, J. Huang, and S. Lin, A posteriori error estimation for a C^1 virtual element method of Kirchhoff plates, *Computers & Mathematics with Applications*, 120, pp. 132-150.

Capítulo 44

On the evolution of a convolution type differential-difference model

Silvia Rueda Sanchez
Universidad del Bío Bío
E-mail: sruedas@ubiobio.cl

Resumen

In this work, we give representation results for solutions of time-fractional differential equations which involve operators on $\ell^p(\mathbb{Z})$ defined by discrete convolution

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f(t, m) = -u(t, m)Nf(t, m) + Bf(t, m) - cf(t, m), & m \in \mathbb{Z}, t \geq 0, \\ f(0, m) = \delta_0(m), & m \in \mathbb{Z}, \\ Nu(t, m) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

where $Bf(m) = (b * f)(m)$, $Nf(\cdot, m) = (n * f)(m)$ $b, n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and $c > 0$. This system generalizes the well-known fractional diffusion-advection equation with decay. Explicit representation, properties such as uniqueness, spatial regularity, positivity, ℓ^1 -norm, among others, are the main focus of this talk.

Bibliografía

- [1] L. Abadías and P. Miana. Quasigeostrophic equations for fractional powers of infinitesimal generators. *J. Funct. Spaces* 2019 (2019), Article ID 6934895, 7 pp.
- [2] L. Abadías, J. González-Camus, P.J. Miana and J.C. Pozo. Large time behaviour for the heat equation on \mathbb{Z} : moments and decay rates. *J. Math. Anal. Appl.* 500 (2021), no. 2, 125137.
- [3] L. Abadías, J. González-Camus and S. Rueda. Time-step heat problem on the mesh: asymptotic behavior and decay rates. *Forum Math.* 35 (2023), no. 6, 1563–1582. doi:10.1515/forum-2022-0334.

- [4] L.A. Caffarelli and A. Vasseur. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. *Ann. of Math. (2)* 171 (2010), no. 3, 1903–1930.
- [5] V. Keyantuo, C. Lizama, S. Rueda and M. Warma. Asymptotic behavior of mild solutions for a class of abstract nonlinear difference equations of convolution type. *Adv. Difference Equ.* 2019 (2019), no. 251, 18 pp.

Capítulo 45

Minmax principle and bounds for the eigenvalues of Dirac operators

Monika Winklmeier

Universidad de los Andes, Bogotá

E-mail: mwinklme@muniandes.edu.co

Resumen

En esta charla revisaremos primero el principio clásico de variación para los valores propios de una matriz simétrica y luego para operadores autoadjuntos semiacotados por abajo. Recordamos unas aplicaciones de dicho principio.

En la segunda parte de la charla veremos cómo se puede usar un principio variacional generalizado para describir valores propios en una brecha del espectro esencial de un operador autoadjunto no acotado. Como aplicación estudiaremos el operador de Dirac en dimensión 1. Esta última parte se base en un trabajo conjunto con Daniel Sánchez-Mendoza.

Palabras Clave: espectro discreto, principio de variación, operador de Dirac.

Bibliografía

- [1] P. Binding, D. Eschwé, H. Langer. Variational principles for real eigenvalues of self-adjoint operator pencils. *Integral Equations Operator Theory* 38 (2) (2000) 190–206.
- [2] D. Eschwé, M. Langer. Variational principles for eigenvalues of self-adjoint operator functions. *Integral Equations Operator Theory* 49 (3) (2004) 287–321.
- [3] H. Langer, M. Langer, C. Tretter. Variational principles for eigenvalues of block operator matrices. *Indiana Univ. Math. J.* 51 (6) (2002) 1427–1459.
- [4] M. Langer and C. Tretter. Variational Principle for eigenvalues of the Klein-Gordon equation *J. Math. Phys.*, 47(10):103506, 18, 2006

- [5] D. Sánchez-Mendoza, M. Winklmeier. On the existence of eigenvalues of a one-dimensional Dirac operator *J. Math. Anal. Appl.* 549(2), 2025)

Capítulo 46

Más allá de las funciones: Espacios vectoriales topológicos y distribuciones

Oswaldo Dede Mejía

Corporación Universitaria de Ciencias Empresariales, Educación y Salud

E-mail: palencia@niu.edu

Resumen

Las matemáticas no se detienen en los números ni en las funciones clásicas. En muchos problemas de la física y el análisis, aparecen objetos “extraños” como la **delta de Dirac** o las **derivadas de funciones que, en realidad, no son diferenciables**. Para darles sentido, necesitamos ampliar nuestro marco de trabajo.

En esta conferencia mostraremos cómo los **espacios vectoriales topológicos** que son estructuras que combinan álgebra y topología, nos permiten definir un lenguaje poderoso: el de las **distribuciones**.

Las distribuciones surgen como una extensión natural de las funciones clásicas para dar sentido a objetos como la delta de Dirac o derivadas de funciones no diferenciables.

- Veremos cómo los espacios de funciones suaves, como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se convierten en escenarios ideales para estudiar continuidad y convergencia.
- Descubriremos que las distribuciones no son funciones, sino funcionales lineales continuos que generalizan la noción de función.
- Exploraremos ejemplos esenciales: desde la delta de Dirac hasta derivadas de distribuciones.
- Finalmente, mostraremos su impacto en la resolución de ecuaciones diferenciales y en la transformada de Fourier, herramientas fundamentales en matemáticas aplicadas y física.

Capítulo 47

Propiedad de disipatividad y autopista para el modelo Lotka-Volterra estocástico, controlado y con saltos de Lévy

David Castillo-Fernández

Universidad Autónoma Metropolitana

E-mail: dcafe@azc.uam.mx

Cutberto Romero-Meléndez

Universidad Autónoma Metropolitana

E-mail: cutberto@azc.uam.mx

Resumen

Consideramos un modelo dinámico controlado y estocástico de Lotka-Volterra para el sistema de un depredador y dos presas con saltos de Lévy, como se muestra en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (\eta x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t)) - \delta x_1(t)x_3(t) \\ &\quad - Ax_1(t)u_1(t)dt + \alpha_1 dW_1(t) \\ &\quad + x_1(t)u_1(t) \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(t, x_1(t-), z)N_1(dt, dx_1) \\ dx_2(t) &= (\omega x_2(t) - \beta x_2(t)x_1(t) - \epsilon x_2(t)x_3(t) \\ &\quad - Bx_2(t)u_2(t))dt + \alpha_2 dW_2(t) \\ &\quad + x_2(t)u_2(t) \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(t, x_2(t-), z)N_2(dt, dx_2) \\ dx_3(t) &= (-\kappa x_3(t) + \delta x_3(t)x_1(t) + \epsilon x_3(t)x_2(t) \\ &\quad - Cx_3(t)u_3(t))dt + \alpha_3 dW_3(t) \\ &\quad + x_3(t)u_3(t) \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(t, x_3(t-), z)N_3(dt, dx_3), \end{aligned} \tag{47.1}$$

donde

- η, ω, κ son tasas de crecimiento intrínseco de las poblaciones de presas y el depredador.
- β, δ y ϵ son las tasas de contacto por unidad de tiempo entre presa-presa, depredador-primera presa y depredador-segunda presa, respectivamente,

con condiciones iniciales y finales

$$x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}, x_3(0) = x_{03}, x_1(T) = x_{11}, x_2(T) = x_{12}, x_3(T) = x_{13}.$$

Se plantea el siguiente **Problema de Control Óptimo**:

Encontrar los controles $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ en el sistema (47.1), con condiciones iniciales y finales dadas, tal que $\min_{u \in U} J(u_1, u_2, u_3)$, en donde:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^3 (x_i^2(t) + u_i^2(t)) dt \quad (47.2)$$

El sistema (47.1) tiene la forma general siguiente:

$$dx_t = f(x_t, u_t)dt + g(x_t, u_t)dW_t + \int_{\mathbb{R}^3} \gamma(t, x(t-), z)N(dt, dx), \quad (47.3)$$

con las siguiente elección de $f(x_t, u_t)$

$$f(x_t, u_t) = \begin{pmatrix} \eta x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) - \delta x_1(t)x_3(t) - Ax_1(t)u_1(t) \\ \omega x_2(t) - \beta x_1(t)x_2(t) - \epsilon x_2(t)x_3(t) - Bx_2(t)u_2(t) \\ -\kappa x_3(t) + \delta x_3(t)x_1(t) - \epsilon x_2(t)x_3(t) - Cx_3(t)u_3(t) \end{pmatrix}$$

y de $g(x_t, u_t)$ como:

$$g(x_t, u_t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Discutimos un tipo de estabilidad para las trayectorias del estado, el control óptimo y las trayectorias adjuntas del sistema, llamado propiedad de la autopista (turnpike property), descrito por el siguiente resultado:

Teorema (Turnpike). Dado el sistema (47.3), supóngase que se cumplen las hipótesis de crecimiento lineal sobre el término de la deriva $f(x_t, u_t)$, las condiciones de Lipchitz sobre el término de difusión $g(x_t, u_t)$, que el control $u(t) = (u_1, u_2, u_3)$ y el salto $\int_{\mathbb{R}^3} \gamma(t, x(t-), z)N(dt, dx)$ sean acotados. Entonces existen constantes positivas R, V , tales que la solución del problema de control óptimo planteado, denotada como $(x_T(t), u_T(t), p_T(t))$, y la solución de equilibrio estacionario, de (47.1), denotada por $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$, satisfacen la desigualdad:

$$E\|x_T(t) - \bar{x}(t)\|^2 + E\|u_T(t) - \bar{u}(t)\|^2 + E\|p_T(t) - \bar{p}(t)\|^2 \leq Re^{-2V(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Esta propiedad implica que una trayectoria óptima, dure la mayor parte del tiempo en una vecindad de una trayectoria de equilibrio balanceada. Para su demostración, se supone, en una vecindad, crecimiento lineal y condiciones de Lipschitz sobre los términos de deriva y difusión,

se aplica la teoría matricial algebraica de Riccati y el Principio del Máximo Estocástico para expresar el control óptimo en términos del proceso de Lévy y las variables de estado y adjuntas, y finalmente se establece la estimación exponencial de la tasa de convergencia de las trayectorias de equilibrio.

Finalmente se estudia bajo qué condiciones se tiene la propiedad de disipatividad del sistema (47.1), definida de la siguiente manera:

Diremos que el problema de control (47.3) es *estrictamente disipativo* en el equilibrio $((\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t))$, si existe una función $V : \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^2(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(0, T; \mathbb{R}^n))$, acotada y una función $r^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente, continua y acotada, tal que se cumpla:

$$EV(x_T, u_T) \leq V(x_0, u_0) + E\left(\int_0^T f^0(x_s, u_s) - f^0(x_0, u_0) - r^0(\|x_s - \bar{x}_s\|) ds\right),$$

Dicho esto, podemos escribir el siguiente resultado sobre disipatividad estricta:

Teorema (disipatividad estricta). Suponemos que se cumplen las hipótesis de crecimiento lineal sobre el término de la deriva $f(x, u)$, condiciones de Lipchitz sobre el término de difusión y finalmente que existan las funciones, $\mathcal{V}(x_t, u_t)$ que sea C^2 y $r(x)$ una función continua y creciente, tales que exista una constante positiva c_3 que cumpla para $t \in [t_1, t_2]$:

$$i) L\mathcal{V}(x_t, u_t) \leq -c_2 r(\|x_t - \bar{x}_t\|)$$

$$ii) \mathcal{V}(x_t, u_t) \leq f^0(x_t, u_t) - f^0(x_0, u_0),$$

en donde $f^0(x_t, u_t) = \sum_{i=1}^3 (x_i^2(t) + u_i^2(t))$. Entonces el problema de control (47.3) cumple con la propiedad de disipatividad estricta.

Palabras Clave: Disipatividad, Turnpike, Lotka-Volterra.

Bibliografía

- [1] Romero-Meléndez, C., D. Castillo-Fernández, (2022). *Strong convergence on a stochastic controlled Lotka-Volterra 3-species model with Lévy jumps*. Cybernetics and Physics 2022, Vol. 11, no. 4, 227–233.
- [2] Trélat, E., E. Zuazua. (2015). *The turnpike property infinite-dimensional nonlinear optimal control*. J. Diff. Equ. 258, no. 1, pp. 81–114.
- [3] L. Grune. *Dissipativity and optimal control: Examining the turnpike phenomenon*. IEEE Control Systems Magazine, vol. 42, no. 2, pp. 74–87. IEEE Control Systems Magazine, vol. 42, no. 2, pp. 74–87

Capítulo 48

Trapped waves in a rectangular channel with Gaussian bathymetry: A numerical analysis

Daniel Felipe Zárate Bello

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: est.daniel.zarate@unimilitar.edu.co

Maria Isabel Romero Rodríguez

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co

Hector Machuca Balaguera

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: hector.machuca@unimilitar.edu.co

Abstract

This work investigates the propagation of surface waves in a rectangular channel of length $2L$ and width $2d$ ($L \gg d$), with a variable bathymetry defined by a Gaussian well, $H(x) = h_0 - \epsilon e^{-x^2}$. Using finite-difference numerical simulations, the two-dimensional wave equation is solved to analyze how the localized bottom perturbation modifies the natural frequencies of the system and induces confined oscillation modes. The model incorporates a shifted Gaussian initial profile and absorbing layers at the boundaries to emulate an infinite channel.

The results show that the Gaussian well promotes energy confinement in the central region, preventing its dissipation towards infinity, in contrast with a flat bottom ($H(x) = h_0$), where the energy disperses rapidly. This phenomenon highlights the influence of bathymetry on wave dynamics, with applications in coastal protection, offshore structure design, resonance mitigation, and wave energy harvesting. Future extensions are proposed, including the incorporation of nonlinear effects and the study of more complex bathymetries, in order to broaden the applicability of the model to real engineering scenarios.

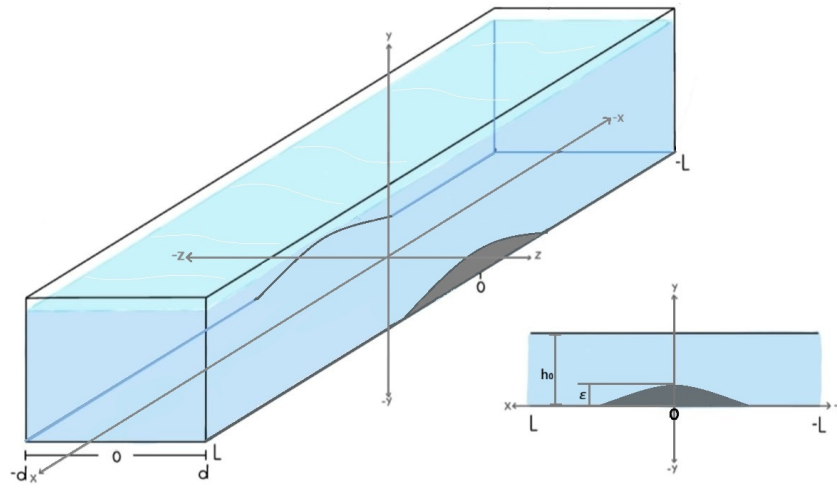


Figura 48.1: Scheme of the rectangular channel with a Gaussian well at the bottom.

Keywords: Trapped waves, Variable bathymetry, Finite difference method, Gaussian well, Energy confinement.

Acknowledgment

We acknowledge the support of the Vice-Rector of Research, Universidad Militar Nueva Granada, through project IMP-CIAS-4084 - 2025 Term.

Bibliografía

- [1] N. E. Hurt, *Mathematical Physics of Quantum Wires and Devices*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [2] C. M. Linton, P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acoustics*, *Wave Motion*, **45**(1–2), 16–29, 2007.
- [3] M. A. Lavrentiev, B. V. Chabat, *Effets Hydrodynamiques et Modèles Mathématiques*, Mir, Moscú, 1972.
- [4] J. T. Londergan, J. P. Carini, D. P. Murdock, *Binding and Scattering in Two-Dimensional Systems: Applications to Quantum Wires, Waveguides and Photonic Crystals*, Springer, 1999.
- [5] F. Ursell, *Trapping of surface waves by submerged bodies*, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **47**(2), 347–358, 1951.
- [6] D. I. Ketcheson, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations: Theory and Applications*, SIAM, 2024.

- [7] A. Chabchoub, *Extreme Ocean Waves: Observations and Modelling*, Cambridge University Press, 2023.

Capítulo 49

Predicción de Dinámicas de la Vegetación con Nixtla y DataLad

Gloria Carrascal

Universidad de Leipzig, Alemania

E-mail: g.carrascal_perez@studserv.uni-leipzig.de

Resumen

El monitoreo de la vegetación es fundamental para comprender las respuestas de los ecosistemas frente al cambio climático, las sequías y la variabilidad estacional. En este contexto, el k-Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (kNDVI), permite cuantificar la salud y productividad de la cubierta vegetal con alta resolución espacial y temporal. Sin embargo, transformar grandes volúmenes de datos de observación terrestre en pronósticos reproducibles y comparables continúa siendo un desafío. El propósito de este estudio es desarrollar un flujo de trabajo reproducible para la predicción dinámica del kNDVI, mediante la integración de técnicas avanzadas de pronóstico de series temporales con herramientas de administración de datos orientadas a la trazabilidad y la ciencia abierta. La propuesta combina el ecosistema Nixtla, con el modelo fundacional (TimeGPT), y DataLad, una herramienta de control de versiones basada en Git y git-annex que permite gestionar grandes volúmenes de datos de forma eficiente y colaborativa.

El conjunto de datos utilizado comprende observaciones de kNDVI registradas entre el 2000-03-01 y el 2021-12-27, con una frecuencia temporal de 8 días, derivadas de imágenes Sentinel-2 de la base de datos DeepESDL. Para el pronóstico, se implementaron los modelos Ridge Regressor y TimeGPT, evaluados en horizontes de 98 días mediante métricas de regresión como el Error Absoluto Medio (MAE) y validación visual de las series predichas, automatizando los experimentos con DataLad. Este enfoque muestra potencial para rellenar huecos y interpolar temporalmente series derivadas de observación satelital, donde las pérdidas de datos son frecuentes debido a la nubosidad, fallos de sensores o errores de preprocesamiento. El modelo es capaz de generalizar la dinámica temporal de la vegetación, siempre que se cuente con recursos computacionales adecuados e información contextual suficiente.

Los autores expresan su gratitud a Nixtla por proveer el recurso de TimeGPT para el proyecto.
Palabras Clave: kNDVI, Teledetección, Pronóstico de Vegetación, TimeGPT, Datalad.

Capítulo 50

La Inteligencia Artificial En Los Procesos De Enseñanza Y Aprendizaje De Las Matemáticas

Julio César Romero Pabón

Universidad del Atlántico

E-mail: julioromero@uniatlantico.edu.co

Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Universidad del Atlántico

E-mail: gabrielvergara@uniatlantico.edu.co

Resumen

La Inteligencia Artificial IA está transformando la educación a nivel global, al ofrecer herramientas inteligentes que enriquecen tanto la enseñanza como el aprendizaje. Su capacidad para procesar grandes volúmenes de información, generar contenidos personalizados y automatizar tareas permite a los docentes centrarse en lo esencial: la interacción pedagógica y el acompañamiento significativo de los estudiantes. Esta tecnología facilita una educación más accesible, inclusiva y adaptada a los ritmos individuales de cada alumno.

En el aula, la IA puede asumir funciones administrativas como la calificación automática de exámenes, la generación de informes de progreso y el seguimiento académico personalizado. Además, permite identificar patrones en el rendimiento estudiantil mediante análisis de datos, lo que ayuda a los educadores a tomar decisiones informadas sobre estrategias didácticas. También ofrece traducción de contenidos a múltiples idiomas, ampliando el acceso a materiales de calidad para estudiantes en contextos diversos.

Desde una perspectiva práctica, la IA permite resolver ecuaciones matemáticas paso a paso, explicando el procedimiento y corrigiendo errores en tiempo real. Asimismo, puede analizar textos escritos por estudiantes, detectando problemas de coherencia, gramática y estilo, y ofreciendo sugerencias de mejora. En el ámbito académico, es capaz de analizar artículos científicos, extrayendo ideas principales, evaluando la estructura argumentativa y facilitando la comprensión crítica del contenido.

En resumen, la IA representa una herramienta poderosa para la innovación educativa. Su integración en los procesos pedagógicos no solo optimiza el trabajo docente, sino que también

potencia el aprendizaje autónomo, reflexivo y contextualizado. Al combinar inteligencia artificial con metodologías activas, se abre un nuevo horizonte para la formación de estudiantes más críticos, creativos y preparados para los desafíos del siglo XXI.

Aplicación de la Inteligencia Artificial a la Enseñanza de las Matemáticas

1. Optimización del Rol Docente Automatización de tareas rutinarias: Corrección automática de ejercicios, generación de informes de progreso y seguimiento personalizado del rendimiento matemático.

Liberación de carga administrativa: Permite al docente enfocarse en la mediación pedagógica, el diseño de estrategias didácticas y el acompañamiento reflexivo.

2. Personalización del Aprendizaje Matemático Adaptación a ritmos individuales: IA ajusta el nivel de dificultad, el tipo de ejercicios y la retroalimentación según el perfil de cada estudiante.

Diagnóstico y refuerzo: Identifica patrones de error en operaciones, razonamiento lógico y resolución de problemas, proponiendo rutas de mejora específicas.

3. Resolución Asistida y Explicativa Descomposición paso a paso: La IA explica procedimientos matemáticos (como derivadas, integrales, ecuaciones lineales) en tiempo real, fomentando la comprensión profunda.

Corrección inteligente: Detecta errores en cálculos, notación o razonamiento, ofreciendo sugerencias y explicaciones contextualizadas.

4. Inclusión y Accesibilidad Traducción de contenidos matemáticos: Facilita el acceso a materiales en múltiples idiomas, incluyendo simbología matemática universal.

Interfaces adaptativas: Plataformas que permiten interacción por voz, texto o visualización gráfica, útiles para estudiantes con necesidades especiales.

5. Análisis de Datos Educativos Evaluación predictiva: La IA analiza el desempeño histórico en pruebas matemáticas para anticipar dificultades y ajustar la planificación curricular.

Visualización de progresos: Genera dashboards con indicadores clave (porcentajes de aciertos, tipos de errores, evolución por competencias).

6. Fomento del Pensamiento Crítico y Creativo Integración con metodologías activas: La IA puede apoyar el aprendizaje basado en proyectos, retos matemáticos y simulaciones interactivas.

Exploración de problemas abiertos: Promueve la formulación de hipótesis, la validación de estrategias y la argumentación matemática.

Palabras Clave: Google AI Studio, Inteligencia artificial educativa, Personalización del aprendizaje, Automatización docente, Análisis de rendimiento estudiantil, Generación de contenidos educativos, Traducción de materiales, Resolución de ecuaciones, Corrección de textos, Análisis de artículos científicos, Innovación pedagógica, Educación digital, Gemini (IA de Google), Herramientas interactivas, Enseñanza adaptativa.

Bibliografía

- [1] Google for Education. (2024). Impulsamos la educación con la IA. Google. <https://edu.google.com/intl/ALLes/ai/education/>
- [2] Google for Education. (2024). IA generativa para educadores [Curso en línea]. Google. <https://edu.exceedlms.com/student/path/1722666-ia-generativa-para-educadores>
- [3] Google. (2024, enero 23). 5 maneras en que apoyamos la enseñanza y el aprendizaje en 2024. Google Blog. <https://blog.google/intl/es-419/noticias-de-la-empresa/5-maneras-en-que-apoyamos-la-ensenanza-y-el-aprendizaje-en-2024/>
- [4] UNESCO. (2023). Artificial Intelligence and Education: Guidance for Policy-makers. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000370307>
- [5] Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning. Center for Curriculum Redesign. <https://curriculumredesign.org/wp-content/uplo>

Capítulo 51

Análisis De Datos Estadísticos Con Inteligencia Artificial

Julio César Romero Pabón

Universidad del Atlántico

E-mail: julioromero@uniatlantico.edu.co

Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Universidad del Atlántico

E-mail: gabrielvergara@uniatlantico.edu.co

Resumen

La inteligencia artificial (IA) está redefiniendo el análisis de datos estadísticos al automatizar procesos complejos, mejorar la precisión interpretativa y facilitar la toma de decisiones informadas en contextos educativos, científicos e institucionales. Gracias a herramientas como Google AI Studio, Copilot y ChatGPT, es posible procesar grandes volúmenes de información, identificar patrones ocultos y generar visualizaciones interactivas que enriquecen la comprensión de fenómenos cuantitativos.

En el ámbito educativo, la IA permite realizar análisis descriptivos, inferenciales y comparativos de manera eficiente, apoyando la evaluación del rendimiento estudiantil, la validación de instrumentos y la sistematización de resultados. Por ejemplo, puede calcular automáticamente medidas de tendencia central, aplicar pruebas estadísticas como t de Student o ANOVA, y generar informes personalizados con recomendaciones pedagógicas basadas en evidencia.

Además, la IA facilita la integración de enfoques mixtos al combinar datos numéricos con análisis de texto, permitiendo interpretar respuestas abiertas, detectar sesgos y evaluar la coherencia argumentativa en producciones escritas. Esta capacidad de procesamiento multiformato amplía el alcance del análisis estadístico tradicional, incorporando dimensiones cualitativas que enriquecen la toma de decisiones.

En resumen, el uso de inteligencia artificial en el análisis estadístico no solo optimiza los procesos técnicos, sino que también potencia la reflexión pedagógica, la mejora institucional y la innovación metodológica. Su aplicación estratégica permite transformar datos en conocimiento

útil, contextualizado y accionable.

Un ejemplo de aplicación es: El Análisis estadístico mixto del rendimiento académico usando Copilot, Google AI Studio y ChatGPT

Objetivo: Aplicar inteligencia artificial para realizar un análisis estadístico descriptivo, inferencial y cualitativo del rendimiento estudiantil, generando recomendaciones pedagógicas basadas en evidencia.

Herramientas utilizadas:

- Google AI Studio: Procesamiento masivo de datos y generación de visualizaciones interactivas.
- Copilot: Cálculo automático de medidas estadísticas, pruebas t de Student y ANOVA.
- ChatGPT: Análisis semántico de respuestas abiertas y redacción de informes pedagógicos.

Datos de entrada:

- Resultados de pruebas objetivas (cuantitativos)
- Producciones escritas de estudiantes (cualitativos)
- Ficha técnica del instrumento aplicado

Procedimiento:

Fase	Acción con IA	Resultado
1. Importación	Carga de datos en Google AI Studio	Base estructurada para análisis
2. Análisis descriptivo	Media, mediana, moda, desviación estándar	Perfil general del grupo
3. Análisis inferencial	Prueba t de Student entre grupos A y B	Detección de diferencias significativas
4. Visualización	Gráficos de dispersión, barras y mapas de calor	Identificación de patrones ocultos
5. Análisis cualitativo	Evaluación de coherencia y profundidad en textos	Matriz de argumentación por estudiante
6. Informe automático	Redacción de recomendaciones pedagógicas	Retroalimentación personalizada

Palabras Clave: Inteligencia artificial educativa, Análisis de datos estadísticos, Personalización del aprendizaje, Algoritmos predictivos, Evaluación institucional, Procesamiento de lenguaje natural, Minería de datos educativos, Toma de decisiones pedagógicas, Aprendizaje adaptativo, Herramientas digitales en educación, Copilot, Google AI Studio, ChatGPT, Innovación metodológica, Evaluación automatizada.

Bibliografía

- [1] Google for Education. (2024). Impulsamos la educación con la IA. Google. https://edu.google.com/intl/ALL_es/ai/education/
- [2] López, C. (2023). La inteligencia artificial y el análisis de datos educativos: una oportunidad de transformación. Corpoeducación. <https://corpoeducacion.org.co/2023/07/05/la->

inteligencia – artificial – y – en – analisis – de – datos – educativos – una – oportunidad – de – transformacion/

- [3] Universidad de los Andes. (2025). Analítica y datos en educación con inteligencia artificial [Curso virtual]. Educación Continua Uniandes. [https://educacioncontinua.uniandes.edu.co/analitica – y – datos – en – educacion – con – inteligencia – artificial/p](https://educacioncontinua.uniandes.edu.co/analitica-y-datos-en-educacion-con-inteligencia-artificial/p)
- [4] GoStudent. (2025). Más de 50 estadísticas sorprendentes sobre la IA en la educación. GoStudent Blog. [https://www.gostudent.org/es – es /blog/estadisticas – sorprendentes – sobre – la – ia – en – la – educacion](https://www.gostudent.org/es-es/blog/estadisticas-sorprendentes-sobre-la-ia-en-la-educacion)
- [5] Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning. Center for Curriculum Redesign. [https : //curriculumredesign.org/wp – content/uploads/AI – in – Education.pdf](https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/AI-in-Education.pdf)

Capítulo 52

Análisis De Varianza (Anova) Y Sus Aplicaciones Con El Lenguaje R

Julio César Romero Pabón

Universidad del Atlántico

E-mail: julioromero@uniatlantico.edu.co

Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Universidad del Atlántico

E-mail: gabrielvergara@uniatlantico.edu.co

Resumen

El análisis de varianza (ANOVA) es una técnica estadística inferencial que permite comparar las medias de tres o más grupos para determinar si existen diferencias significativas entre ellos. En el lenguaje R, esta prueba se implementa de forma eficiente mediante funciones como `aov()` y `anova()`, que permiten modelar relaciones entre variables categóricas independientes y variables numéricas dependientes.

R facilita el proceso completo del ANOVA: desde la importación de datos, la verificación de supuestos (normalidad, homogeneidad de varianzas), hasta la ejecución del modelo y la interpretación de resultados. Por ejemplo, con un conjunto de datos estructurado, se puede aplicar el comando `aov(resultado grupo, data = datos)` para obtener el modelo, seguido de `summary()` para visualizar los valores de F, los grados de libertad y el nivel de significancia (p-value).

Además, R permite complementar el análisis con pruebas post hoc como Tukey HSD (`TukeyHSD(modelo)`) para identificar qué grupos difieren entre sí, y generar visualizaciones con `ggplot2` para representar gráficamente las diferencias entre medias. Esta capacidad de integración convierte a R en una herramienta poderosa para la validación estadística de instrumentos, la comparación de tratamientos educativos y la toma de decisiones basada en evidencia.

En resumen, el uso de R para el análisis de varianza no solo optimiza la ejecución técnica del procedimiento, sino que también promueve la transparencia metodológica y la reproducibilidad científica en contextos educativos y de investigación.

Ejemplo Aplicado: ANOVA en R para Evaluar Diferencias de Rendimiento Académico

Objetivo: Determinar si existen diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento académico entre tres grupos de estudiantes que participaron en distintas estrategias pedagógicas.

Contexto del Estudio

- Variable dependiente: Puntaje final en la prueba de matemáticas.
- Variable independiente: Estrategia pedagógica aplicada (Grupo A: Aprendizaje tradicional, Grupo B: Aprendizaje activo, Grupo C: Aprendizaje asistido por IA).
- Tamaño muestral: 90 estudiantes (30 por grupo).

Código en R

```
# Datos simulados
grupo <- factor(rep(c("Tradicional", "Activo", "IA"), each = 30))
puntaje <- c( rnorm(30, mean = 70, sd = 5), rnorm(30, mean = 75, sd = 5),
             rnorm(30, mean = 80, sd = 5) )

# Crear data frame
datos <- data.frame(grupo, puntaje)

# Aplicar ANOVA
modelo <- aov(puntaje ~ grupo, data = datos)
# Ver resultados
summary(modelo)
```

Interpretación de Resultados

- Si el valor $p < 0.05$, se concluye que existen diferencias significativas entre al menos dos grupos.
- Se puede complementar con un post hoc Tukey para identificar entre qué grupos se encuentran las diferencias:

En R

```
TukeyHSD(modelo)
```

Palabras Clave: Análisis de varianza (ANOVA), Lenguaje R, Estadística inferencial, Comparación de medias, Supuestos del modelo ANOVA, Pruebas post hoc, Visualización de datos, Modelos lineales, Validación estadística, Educación superior, Reproducibilidad científica, `aov()`, `TukeyHSD()`, `ggplot2`, `rstatix`.

Bibliografía

- [1] Aprende con Alf. (s.f.). 10. Análisis de la varianza (ANOVA) – Prácticas de estadística con R. [https://aprendeconalf.es/estadistica – practicas – r/10 – anova.html](https://aprendeconalf.es/estadistica-practicas-r/10-anova.html)
- [2] Garibaldi, L. A., Oddi, F. J., Azuaga, G. D., Behnisch, A. N., & Aristimuño, F. J. (2023). Modelos estadísticos en lenguaje R (Edición ampliada). Editorial UNRN. https://editorial.unrn.edu.ar/media/data/lecturas/garibaldi_lenguajeR_unrn.pdf
- [3] Wickham, H., & Grolemund, G. (2017). R for Data Science: Import, Tidy, Transform, Visualize, and Model Data. O'Reilly Media. <https://r4ds.had.co.nz/>
- [4] Crawley, M. J. (2013). The R Book (2nd ed.). Wiley. Referencia clásica para el uso de R en análisis estadísticos, incluyendo ANOVA y modelos lineales.
- [5] Field, A., Miles, J., & Field, Z. (2012). Discovering Statistics Using R. SAGE Publications. Excelente fuente para comprender ANOVA en R con enfoque aplicado en ciencias sociales y educación.

Viernes 14 de noviembre

Capítulo 53

Influencia de una elipse en el cálculo de volumen parcial de un tanque cilíndrico recto inclinado con interfaz tangente a esta

Samuel Isaac Suarez Cabarcas

Universidad del Atlántico

E-mail: sisuarez@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo desarrollar un modelo matemático para calcular el volumen parcial de un líquido contenido en un recipiente cilíndrico recto inclinado, considerando la influencia de una Elipse en su geometría con interfaz tangente a esta.

El estudio se enmarcó en un enfoque cuantitativo, porque hubo manipulación de variables con valores numéricos; analítico, porque se hicieron análisis en ciertos parámetros de la geometría del cilindro en relación con la elipse; aplicado, porque proporcionó una solución a un problema concreto del mundo real mediante herramientas teóricas y técnicas de modelación matemática. El nivel de investigación fue analítico y el diseño de investigación fue cuantitativo.

Bajo la existencia de múltiples métodos clásicos para calcular el volumen de un líquido situado dentro de un recipiente cilíndrico, desde cuando este se encuentra verticalmente recto u horizontalmente recto, vasta con aplicar las fórmulas estándares conocidas $V = \pi r^2 h$, o, $V = r^2 \cos^{-1}\left(\frac{r-h}{r}\right) - (r-h)\sqrt{2rh - h^2}$ [1], respectivamente.

Este método de estudio está enfocado, precisamente, cuando el recipiente cilíndrico adopta un margen de inclinación rompiendo la simetría del sistema, teniendo en cuenta que al inclinar el recipiente el volumen del líquido es invariante. Este margen de inclinación hace del problema algo más complejo de solucionar; insisto, hay herramientas que pueden resolver el problema, como lo es el cálculo integral, calculo vectorial, la geometría analítica y la trigonometría ([2, 3, 4]). Sin embargo, el uso de estas herramientas requieren de mucho estudio para saber utilizarlas o aplicarlas; si hablamos computacionalmente, realizar un programa o software que siga las técnicas de estas herramientas requieren de mucho tiempo y dinero. Luego, con este novedoso método, busco simplificar el uso de estas herramientas a una simple fórmula accesible a cualquier persona con poco o mucho conocimiento del tema. Para ello, veamos los parámetros de nuestro cilindro.

Definición 1. Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias a los focos es igual a $2a$ notado por: $PF_1 + PF_2 = 2a$, donde, PF_1 y PF_2 son los focos y $a > 0$. Su ecuación canónica es dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definición 2. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x = a$ (curva C). **La recta tangente** a la gráfica de f dada por $y = f(x)$ en el punto $P = (a, f(a))$ es la mejor aproximación lineal a la curva cerca de P que satisface:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Donde,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

es la derivada de f en $x = a$ (pendiente de la recta). Algebraicamente se representa por:

$$y = mx + c$$

donde m es la pendiente (o inclinación) de la recta, o también notada por $m = \tan \theta$, y c que es la intersección con el eje y .

Definición 3. Sea $x \in \mathbb{R}$ e $y \in L$ con $R = [-r, r]$ y $L = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ el largo y ancho del recipiente, respectivamente. Entonces $x, y \in R \times L = [-r, r] \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ es el bloque de estudio (geometría del recipiente en el plano cartesiano).

Dada la geometría del cilindro de largo " l " y radio de la base " r ". Si $L > R$, sea la elipse vertical situada en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la recta $y = mx + c$ tangente a esta. Sustituyendo, nos queda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1$$

al final, obtenemos la condición de tangencia entre la recta y la elipse dada por:

$$c^2 = b^2 + m^2 a^2$$

Teorema 1. (Principio de proporcionalidad o principio de los elementos proporcionales de Tales). Dado un triángulo $\triangle ABC$, se traza un segmento $DE \in \triangle ABC$, tal que, $D \in AB$, $E \in AC$ y $DE \parallel BC$, entonces:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Demostración. Ver [5]. □

Palabras Clave: Cálculo de volumen, cilindro, elipse, inclinación, tangente.

Bibliografía

- [1] C. M. López, Mecánica de Fluido y Máquinas Hidráulicas, 2015.
- [2] J. G. R. Berrío, Cálculo Vectorial, 2020.
- [3] O. A. Cevallos-Muñoz, Introducción al Cálculo Vectorial para Ingeniería, 2024.
- [4] J. A. P. J. G., Geometría Analítica e Introducción al Cálculo Vectorial, 2016.
- [5] D. R. Osorio, Geometría: Proporcionalidad y Semejanza (1^a ed.), 2017.

Capítulo 54

Homología persistente y su aplicación en espacios químicos

Julio Deluque Gomez
Universidad de La Guajira
E-mail: jdeluque@uniguajira.edu.co

Rafa Ramiro Vega Brito
Universidad de La Guajira
E-mail: rvega@uniguajira.edu.co

Dairo José Hernández Páez
Universidad de La Guajira
E-mail: djhernandezp@uniguajira.edu.co

Resumen

La homología persistente (HP) ofrece un marco estable y computacionalmente eficiente para extraer rasgos topológicos robustos de datos geométricos y combinatorios. En esta charla presentaremos una panorámica accesible de la HP y su integración con herramientas de topología computacional, tales como los complejos de Čech, Vietoris–Rips y los complejos alfa, enfatizando su interpretación mediante códigos de barras y *landscapes*. Discutiremos el teorema de estabilidad y el papel de las filtraciones por subniveles y superniveles, así como por umbrales de distancia [1], [2].

Mostraremos aplicaciones a espacios químicos: (i) análisis de paisajes energéticos moleculares usando filtraciones de subnivel $\{E \leq r\}$ para identificar mínimos, puntos silla y máximos; (ii) estudio de nubes de conformeros en \mathbb{R}^{3N} con métricas tipo RMSD y complejos de Rips, conectando clases de H_0 y H_1 con conectividad y “túneles” conformacionales; y (iii) caracterización de bibliotecas de compuestos (espacio químico) a partir de descriptores geométricos y *embeddings*, donde la HP actúa como un resumen cuantitativo y reproducible para comparar familias moleculares [2], [3].

Cerraremos con una breve guía de implementación y criterios prácticos de persistencia, como umbralado, estabilidad y complejidad computacional [4], [5].

Objetivo: Presentar los principios de la homología persistente y su utilidad para describir, comparar y visualizar estructuras globales en espacios químicos, tales como energía, conformaciones y colecciones moleculares.

Público Objetivo: Estudiantes avanzados y comunidad de matemática aplicada, física computacional, química computacional y ciencia de datos. No se asume conocimiento previo de topología algebraica.

Palabras Clave: Homología persistente; topología computacional; complejos simpliciales; espacios químicos; paisajes energéticos; RMSD; filtraciones de subnivel.

Modo de Participación: Ponencia.

Área Sugerida: Topología algebraica y computacional.

Palabras Clave: Conjunto flexible, conjunto bipolar flexible, conjunto bipolar rough flexible.

Bibliografía

- [1] H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian, *Topological Persistence and Simplification*, *Discrete & Computational Geometry*, 28(4), pp. 511–533, 2002.
- [2] A. Zomorodian and G. Carlsson, *Computing Persistent Homology*, *Discrete & Computational Geometry*, 33(2), pp. 249–274, 2005.
- [3] R. Ghrist, *Barcodes: The Persistent Topology of Data*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(1), pp. 61–75, 2008.
- [4] G. Carlsson, *Topology and Data*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2), pp. 255–308, 2009.
- [5] H. Edelsbrunner and J. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.

Capítulo 55

New parametric polynomials of U-Charlier-Poisson type: properties and Szász-type operators including these polynomials

Javier Villa

Universidad del Atlántico

E-mail: jevilla@mail.uniatlantico.edu.co

Alejandro Urieles

Universidad del Atlántico

E-mail: auries@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

In this article, we introduce a new family of parametric U -Charlier-Poisson type polynomials, denoted by $G_n^{[2,r]}(x, \alpha, \beta, \lambda)$. Then, some properties are studied, such as its explicit representation, the orthogonality relationship, and its connection with the derivative of the harmonic function. Subsequently, Szász-type operators are applied to the new family of polynomials to study convergence properties using Korovkin's theorem.

Bibliografía

- [1] Korovkin P. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (Russia). *Doklady Academy of Sciences*. 1953; 90: 961–964.
- [2] Szasz O. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. 1950; 45: 239–245.
- [3] Varma S, Sezgin S, Gurhan I. Generalization of Szasz operators involving Brenke type polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*. 2012; 64: 121–127. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.01.025>.

- [4] Ozmen N, Erkus DE. On the Poisson-Charlier polynomials. *Serdica Mathematical Journal*. 2015; 41: 458–470.
- [5] Varma S, Tasdelen F. Szasz type operators involving Charlier polynomials. *Mathematical and Computer Modelling*. 2012; 56: 118–122. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.017>.
- [6] Chihara TS. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach; 1978.
- [7] Castilla L, Cesarano C, Bedoya D, Ramirez W, Agarwal P, Jain S. A generalization of the Apostol-X type Frobenius-Genocchi polynomials of level 1. In: Agarwal P, Cattani C, Momani S. (eds.) *Fractional Differential Equations: Theoretical Aspects and Applications, Advanced Studies in Complex Systems*. Academic Press; 2024. p. 11–26. Available from: <https://doi.org/10.1016/B978-0-44-315423-2.00007-2>.
- [8] Dattoli G, Cesarano C. On a new family of Hermite polynomials associated to parabolic cylinder functions. *Applied Mathematics and Computation*. 2003; 141(1): 143–149. Available from: [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00328-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00328-4).
- [9] Dattoli G, Ricci PE, Cesarano C. The Lagrange polynomials, the associated generalizations, and the umbral calculus. *Integral Transforms and Special Functions*. 2003; 14(2): 181–186. Available from: <https://doi.org/10.1080/1065246031000098186>.
- [10] Dattoli G, Lorenzutta S, Cesarano C. Bernstein polynomials and operational methods. *Journal of Computational Analysis and Applications*. 2006; 8(4): 369–377.
- [11] Urieles A, Ramírez W, Ortega MJ, Bedoya D. Fourier expansion and integral representation for generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials. *Advances in Difference Equations*. 2020; 2020: 534. Available from: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02988-0>.
- [12] Tabinda N, Shahid AW, Parvez A, Ramírez W. Introducing a novel family of Δ_h -Sheffer polynomials and their interconnected hybrid variants. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 2024; 36(3): 317–325. Available from: <https://doi.org/10.22436/jmcs.036.03.06>.
- [13] Mohra Z, Shahid AW, Ramírez W, Mohammad A, Fuentes F. Properties and applications of Bell polynomials of two variables. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 2024; 35(3): 291–303. Available from: <https://doi.org/10.22436/jmcs.035.03.03>.
- [14] Nikiforov AF, Suslov SK, Uvarov VB. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 1991.
- [15] Gradshteyn IS. *Table of Integrals, Series and Products*. New York: Gordon and Breach; 1978.
- [16] Koekoek R, Lesky PA, Swarttouw RF. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2010.

- [17] Olaikhan A. *An Introduction to the Harmonic Series and Logarithmic Integrals*. Ali Shadhar Olaikhan; 2021.
- [18] Srivastava HM, Choi J. *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*. London: Elsevier; 2012. Available from: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-67023-4>.
- [19] Altomare F, Campiti M. *Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications, vol. 17*. Berlin, Germany: Walter De Gruyter; 1994.

Capítulo 56

Modelado In-Silico de crecimiento anómalo en tejido pulmonar mediante fractales

Jose Santiago Durán

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: est.joses.duran@unimilitar.edu.co

Juan Camilo Vargas

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: ingbio.camilovargas@gmail.com

Laura Manuela Orjuela Hernández

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: est.laura.orjuela2@unimilitar.edu.co

Maria Isabel Romero Rodríguez

Universidad Militar Nueva Granada

E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co

Resumen

El cáncer de pulmón es el tipo de cáncer más letal en el mundo [1]. Con los avances médicos se han identificado alteraciones que sufre la estructura pulmonar debido a afectaciones oncológicas, sin embargo aún no hay estudios que describan completamente la complejidad de la estructura tumoral. La presencia de rasgos compartidos identificados en los tejidos de distintos pacientes sugiere que el comportamiento del tumor podría describirse mediante un modelo parametrizado [2]. El uso de fractales en oncología proporciona una oportunidad cuantitativa y escalable para caracterizar el crecimiento tumoral, que no puede capturarse adecuadamente desde la geometría euclidiana clásica [3]. Desde el análisis de las características fractales es posible identificar y estudiar la morfología del cáncer, desarrollando aplicaciones diagnósticas basadas en el reconocimiento de patrones, el análisis de texturas y la segmentación de tejidos [2] [4]. En este trabajo presentamos la implementación de un algoritmo en Python para desarrollar fractales Dosel y de Agregación Limitada por Difusión (DLA) para la simulación del tejido pulmonar y un tumor

respectivamente, generando una máscara binaria que permite la interacción controlada entre las dos estructuras fractales. Este procedimiento permitió simular, visualizar y analizar el comportamiento del crecimiento tumoral en tejido pulmonar desde una perspectiva morfológica y dinámica.

Palabras Clave: Crecimiento Tumoral, Geometría Fractal, Agregación limitada por difusión (DLA)

Bibliografía

- [1] J. Ferlay, M. Ervik, F. Lam, M. Laversanne, M. Colombet, L. Mery, M. Piñeros, A. Znaor, I. Soerjomataram, y F. Bray, *Global cancer observatory: Cancer today*, Lyon, France: International Agency for Research on Cancer, 2024. [Online]. Disponible en: <https://gco.iarc.who.int/today>.
- [2] F. Lennon, G. Cianci, N. Cipriani, T. Hensing, H. Zhang, C. T. Chen, S. Murgu, E. Vokes, y R. Salgia, *Lung cancer—a fractal viewpoint*, Nature Reviews Clinical Oncology, vol. 12, Jul. 2015. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.1038/nrclinonc.2015.108>.
- [3] H. E. Brady, *Mathematical models of cancer: when to predict novel therapies, and when not to*, Bulletin of Mathematical Biology, vol. 81, no. 12, pp. 4367–4382, 2019. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s11538-019-00640-x>.
- [4] R. C. Rockne y J. G. Scott, *Introduction to mathematical oncology*, JCO Clinical Cancer Informatics, vol. 3, pp. 1–4, Apr. 2019. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.1200/CCI.19.00010>.

Capítulo 57

Modelos de Machine Learning para la Predicción de Muerte Materna en Colombia (2022)

Angie Camila Urrego Mendivelso

Universidad El Bosque

E-mail: acurrego@unbosque.edu.co

Karol Dajhana Medina Pérez

Universidad El Bosque

E-mail: kmedinap@unbosque.edu.co

Danny Samuel Martínez Lobo

Docente Universidad El Bosque

E-mail: dsmartinez@unbosque.edu.co

Resumen

Objetivo: Desarrollar y comparar modelos de aprendizaje automático supervisado para predecir la ocurrencia de muertes maternas en Colombia, a partir de la base de datos del DANE de mortalidad materna del 2022, con el fin de identificar el modelo con mejor desempeño para contextos de alta desproporción de clases.

Métodos: Se realizó un estudio transversal con enfoque correlacional utilizando registros de defunciones maternas y no maternas. El preprocesamiento de los datos incluyó limpieza, transformación de variables y selección de características relevantes. Se aplicaron técnicas de imputación de datos faltantes y balanceo de clases mediante el método RandomOverSampler del 10 % al 40 % [1, 2]. Posteriormente, se entrenaron y evaluaron los modelos utilizando validación cruzada con los modelos Random Forest, Regresión Logística, Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) y Bagging Classifier. El rendimiento de los modelos se comparó utilizando métricas de precisión, sensibilidad, F1-score y *accuracy* [3].

Resultados: El conjunto de datos final incluyó 287,150 registros, con una notable desproporción en la variable de interés: el 99.84 % ($n = 286,684$) corresponde a casos sin muerte materna,

mientras que solo el 0.16 % ($n = 466$) corresponde a casos de muerte materna. El modelo Random Forest presentó el mejor rendimiento, con una precisión de 0.8333, sensibilidad de 0.9914 y F1-score de 0.9055 al 25 % de sobremuestreo. El modelo Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) mostró un F1-score de 0.4129 al 25 %, mientras que Bagging Classifier obtuvo la mejor precisión (0.9105) al 10 %. En comparación, el modelo de regresión logística presentó un rendimiento considerablemente bajo, alcanzando una precisión máxima de solo 0.1421.

Conclusión: El modelo Random Forest demostró ser el más eficaz para predecir muertes maternas, destacándose por su precisión y sensibilidad. Los resultados resaltan la capacidad de los modelos de aprendizaje automático para manejar datos desbalanceados y predecir eventos críticos [4, 5]. Estos hallazgos refuerzan el potencial de los modelos predictivos en la mejora de la atención prenatal y la reducción de la mortalidad materna en contextos similares [6, 7].

Palabras Clave: Mortalidad materna; Modelos predictivos; Aprendizaje automático; Salud pública; Desbalance de clases.

Bibliografía

- [1] N. V. Chawla, K. W. Bowyer, L. O. Hall, y W. P. Kegelmeyer, SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique, *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 16, pp. 321–357, 2002.
- [2] H. He y E. A. Garcia, Learning from Imbalanced Data, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 21, no. 9, pp. 1263–1284, 2009.
- [3] D. M. W. Powers, Evaluation: From Precision, Recall and F-Measure to ROC, Informedness, Markedness and Correlation, *Journal of Machine Learning Technologies*, vol. 2, no. 1, pp. 37–63, 2011.
- [4] A. L. Beam y I. S. Kohane, Big Data and Machine Learning in Health Care, *JAMA*, vol. 319, no. 13, pp. 1317–1318, 2018.
- [5] A. Rajkomar, J. Dean y I. Kohane, Machine Learning in Medicine, *New England Journal of Medicine*, vol. 380, pp. 1347–1358, 2019.
- [6] L. Omulo, G. Ong’ayo, R. Mutisya y F. Otieno, Application of machine learning algorithms in predicting adverse maternal outcomes in Sub-Saharan Africa, *PLOS Global Public Health*, vol. 4, no. 2, e11285398, 2024.
- [7] S. Subramaniyan, T. Tadele y D. Bedilu, Comparative analysis of machine learning models for maternal risk classification in low-resource settings, *Future Internet*, vol. 17, no. 5, p. 190, 2024.

Capítulo 58

Propagación de una especie invasora en un hábitat fragmentado: un abordaje estocástico

Gustavo Miguel Guzman Durango

Universidad Tecnológica Metropolitana

E-mail: gguzmand@utem.cl

Fabio Marcellus Lima Sa Makiyama

Universidad Tecnológica Metropolitana

E-mail: f.marcellus@utem.cl

Pablo Martin Rodriguez

Universidad Federal de Pernambuco

E-mail: pablo@de.ufpe.br

Resumen

La fragmentación del hábitat altera la conectividad ecológica y puede habilitar rutas de invasión. Modelamos la dispersión sobre una red de parches (intactos/degradados) con *percolación* dependiente del tipo y análisis multiclase, apoyándonos en teoría de grafos aleatorios y el modelo de configuración [1, 2, 3, 8]. El foco es caracterizar: (i) el *umbral crítico* que da origen a una *componente gigante* colonizada; (ii) la susceptibilidad subcrítica; y (iii) el tamaño final y el escalamiento cerca de la transición [4, 5, 6].

Modelo y PGF. Sea $G^*(n, \mathbf{d})$ un modelo de configuración con función generatriz $g_D(x)$, media $\lambda = g'_D(1)$ y exceso medio

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[D(D-1)]}{\mathbb{E}[D]} = \frac{g''_D(1)}{g'_D(1)}, \quad g_D^*(x) = \frac{g'_D(x)}{\lambda}.$$

Consideramos dos tipos de parches: rojo (R, proporción q) y blanco (W, proporción $1 - q$). Una arista RR sobrevive con probabilidad a^2 , WW con b^2 y RW con ab . La *descendencia por tipo* (al seguir una arista) se codifica mediante las PGF bivariadas [9, 10]:

$$\Phi_R(z_R, z_W) = g_D^*\left(q(1 - a^2 + a^2 z_R) + (1 - q)(1 - ab + ab z_W)\right),$$

$$\Phi_W(z_R, z_W) = g_D^* \left(q(1 - ab + ab z_R) + (1 - q)(1 - b^2 + b^2 z_W) \right).$$

Para el recuento *vértice-enraizado*:

$$G_R(z_R, z_W) = g_D \left(q(1 - a^2 + a^2 z_R) + (1 - q)(1 - ab + ab z_W) \right),$$

$$G_W(z_R, z_W) = g_D \left(q(1 - ab + ab z_R) + (1 - q)(1 - b^2 + b^2 z_W) \right).$$

La condición de existencia de gigante es $\rho(M) > 1$, con

$$M = \kappa \begin{pmatrix} a^2 q & ab(1 - q) \\ abq & b^2(1 - q) \end{pmatrix},$$

que define el *umbral crítico de percolación* [4, 5].

Resultados y manejo. Por simulación Monte Carlo (Erdős–Rényi y configuración) estimamos $\rho(M)$, la fracción colonizada y leyes de escala finita, verificando consistencia con las aproximaciones asintóticas [6, 7]. Operativamente, mantener $\rho(M) \leq 1$ guía políticas: (a) reducir enlaces “puente” (bajan a, b efectivos); (b) restaurar parches para disminuir κ ; y (c) priorizar intervenciones que conserven régimen subcrítico.

Bibliografía

- [1] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications, *Physical Review E* 64, 026118, 2001.
- [2] M. Molloy and B. Reed, A critical point for random graphs with a given degree sequence, *Random Structures & Algorithms* 6, pp. 161–180, 1995.
- [3] M. Molloy and B. Reed, The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence, *Combinatorics, Probability and Computing* 7, pp. 295–305, 1998.
- [4] G. Grimmett, *Percolation*, Springer, 2nd edition, 1999.
- [5] B. Bollobás and O. Riordan, *Percolation*, Cambridge University Press, 2006.
- [6] R. Durrett, *Random Graph Dynamics*, Cambridge University Press, 2007.
- [7] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.
- [8] M. E. J. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, 2010.
- [9] T. E. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer, 1963.
- [10] K. B. Athreya and P. E. Ney, *Branching Processes*, Springer, 1972.

Capítulo 59

Análisis de estabilidad y consistencia dinámica de un esquema de diferencias finitas no estándar para la babesiosis bovina

Deccy Yaneth Trejos Angel
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
E-mail: dytrejosa@udistrital.edu.co

Resumen

En este trabajo, se proporciona y analiza un modelo discreto para una enfermedad huesped-vector (babesiosis bovina), obtenido por medio de un esquema de diferencias finitas no estándar (NSFD), que supone una generalización del modelo discreto directo estudiado en [1]. El análisis matemático del modelo discreto NSFD revela como necesarias ciertas restricciones para que se conserven las propiedades dinámicas esenciales del modelo continuo inicial [2], a saber, la positividad y la acotación de las soluciones, los equilibrios y sus propiedades de estabilidad local y global. En particular, la estabilidad global del punto de equilibrio libre de enfermedad se demuestra, bajo dichas restricciones, utilizando la misma función de Lyapunov del modelo discreto directo. Así pues, se determinan las condiciones para que un modelo discreto NSFD tenga consistencia dinámica con respecto al modelo continuo. Finalmente, se presentan simulaciones numéricas para respaldar la validez de los resultados teóricos establecidos. Las simulaciones numéricas también confirman las ventajas de los esquemas NSFD (consistentes) sobre los esquemas estándar en diferencias finitas (SFD) para tamaños del paso grandes, mostrando la inconsistencia de ciertos modelos discretos SFD, tipo Euler y Runge-Kutta, con el modelo continuo.

Palabras Clave: Esquemas de diferencias finitas no estándar, consistencia dinámica, análisis de Lyapunov, estabilidad global.

Bibliografía

- [1] *A discrete epidemic model for bovine Babesiosis disease and tick populations*, *Open Physics*, 1st edition, 2017.

- [2] *A mathematical model for babesiosis disease in bovines and ticks population*, Aranda Lozano, Diego Fernando and Trejos, Deccy T and Valverde Fajardo, José Carlos and Villanueva, Rafael J, Wiley, 2012

Capítulo 60

Historia y resultados recientes acerca de la desigualdad de Hardy

Héctor Camilo Chaparro Gutiérrez
Universidad de Cartagena
E-mail: hchaparro@unicartagena.edu.co

Resumen

La desigualdad de Hardy, llamada así en honor a Godfrey Harold Hardy, establece que para toda función f no negativa y $p > 1$ se cumple:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx.$$

Esta desigualdad se ha convertido en un resultado fundamental del análisis, con profundas implicaciones en teoría de operadores, ecuaciones diferenciales y análisis funcional.

En esta charla exploraremos el contexto histórico que llevó a su descubrimiento, las contribuciones importantes de Hardy, Littlewood y Pólya, y el desarrollo de diversas generalizaciones. Para esto, seguiremos la ruta histórica trazada en [2], y también los resultados expuestos en [3].

Finalmente, presentaremos resultados recientes sobre esta desigualdad ([1]), en el contexto de los espacios "pequeños" de Lebesgue con exponente variable, $\ell_{p(\cdot)}$.

Palabras Clave: Desigualdad de Hardy, operador integral, exponente variable, espacios de sucesiones.

Bibliografía

- [1] R.E. Castillo, B. Sultan and H.C. Chaparro, On the Discrete Hardy Inequality with Variable Exponent, *Kragujev. J. Math.* 50 (7), pp. 1057–1062, 2026. https://imi.pmf.kg.ac.rs/kjm/pdf/accepted-finished/3baecb6c25d0d71d8188d4021adcbe0f_2536_11122024_101448/kjm_50_7-3.pdf
- [2] A. Kufner, L. Maligranda and L.E. Persson, The prehistory of the Hardy inequality, *Amer. Math. Monthly* 113 (8), pp. 715–732, 2006. <https://doi.org/10.2307/27642033>

- [3] L.E. Persson and N. Samko, On Hardy-Type Inequalities as an Intellectual Adventure for 100 Years. *J. Math. Sci.* 280, pp. 180–197, 2024. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06807-1>

Capítulo 61

Espacios de Sobolev en Espacios Métricos de Medida: Una Aproximación Desde los Espacios de Variación Acotada

Oscar Mauricio Guzmán Fonseca

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

E-mail: oscar.guzman-f@escuelaing.edu.co

Resumen

Se presentan algunas definiciones de los espacios de Sobolev en espacios métricos de medida arbitrarios [1]. Además se discute su relación con los espacios de variación acotada en el sentido de Riesz desde una perspectiva histórica [2, 3], sugiriendo una posible caracterización de los espacios de Sobolev en espacios métricos de medida en un sentido variacional, acudiendo principalmente a los trabajos de B.Bojarski, P. Hajlasz [4, 5].

Palabras Clave: Espacio de Sobolev, Espacio Métrico de medida, Medida s regular, Espacio de variación acotada.

Bibliografía

- [1] Heinonen, J., Koskela, P., Shanmugalingam, N., Tyson, J. T. *Sobolev spaces on metric measure spaces* (No. 27). cambridge university press, 2017.
- [2] Appell, Jürgen, Józef Banas, and Nelson José Merentes Díaz. *Bounded variation and around*. Vol. 17. Walter de Gruyter, 2013.
- [3] Cruz-Uribe, David., Guzmán, Oscar., Rafeiro, Humberto. *A characterization of weighted Sobolev spaces via weighted Riesz bounded variation spaces*. *Studia Mathematica*, vol. 274, no 3, p. 287-304. 2024.
- [4] Bojarski, B. *Remarks on the Bourgain-Brezis-Mironescu approach to Sobolev spaces*. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, 2011, vol. 59, no 1, p. 65-75.

- [5] Hajlasz, P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*. Potential Analysis, vol. 5, no 4, p. 403-415. 1996.

Capítulo 62

Nuevas Derivadas locales en el Cálculo Fraccional

Miguel Vivas-Cortez

Pontificia Universidad Católica del Ecuador

E-mail: mjvivas@puce.edu.ec

Resumen

En esta ponencia se presenta el marco teórico unificado de la Derivada Local Fraccionaria Unificada y Generalizada (UG) y su correspondiente Transformada de Laplace localizada y generalizada (UGLT), recientemente desarrollados como una extensión natural de numerosas formulaciones existentes en el cálculo fraccionario local. El objetivo principal de este enfoque es proporcionar una estructura matemática flexible capaz de recuperar, en un mismo esquema, diversos operadores fraccionarios clásicos y no clásicos, tales como la derivada deformable, la derivada biparamétrica, y otros modelos derivados de procesos de memoria débil y dinámica escalada.

El operador UG se define a partir de una deformación local en el argumento de la función y un coeficiente de ajuste dependiente del orden fraccionario, lo que permite expresar la derivada en términos de una combinación lineal entre la función original y su derivada clásica. Esto conduce a un teorema fundamental que establece la equivalencia del operador UG con una estructura diferencial estándar, manteniendo la coherencia analítica y la posibilidad de recuperación de los casos límites cuando el orden fraccionario tiende a uno.

De forma análoga, se introduce la integral UG, construida de manera compatible con la derivada, permitiendo enunciar versiones fraccionarias localizadas del Teorema Fundamental del Cálculo. Posteriormente, se presenta la Transformada de Laplace UG, obtenida como una generalización integral ponderada por la exponencial UG, lo que posibilita el estudio de ecuaciones diferenciales bajo el marco unificado. Este enfoque resulta especialmente valioso en modelos donde la variación temporal o espacial depende de escalas internas no homogéneas, sistemas con memoria instantánea modulada o procesos dinámicos que requieren adaptación en el operador derivativo.

Los resultados muestran que esta teoría no solo generaliza una familia amplia de operadores previamente conocidos, sino que además proporciona herramientas analíticas compactas, consistentes y aplicables tanto al análisis cualitativo como a la resolución explícita de ecuaciones

diferenciales localizadas.

Palabras Clave: Derivada Biparamétrica, Transformada de Laplace, Transformada de Laplace Unificada.

Bibliografía

- [1] Priyanka Ahuja, Fahed Zulfeqarr, and Amit Ujlayan. Deformable fractional derivative and its applications. *AIP Conference Proceedings*, 1897(1):020008, 10 2017. arXiv:https://pubs.aip.org/aip/acp/article-pdf/doi/10.1063/1.5008687/14011914/020008_1_online.pdf, doi:10.1063/1.5008687.
- [2] Abdon Atangana. *Derivative with a New Parameter: Theory, Methods and Applications*. Elsevier, 10 2015. <https://books.google.com.ec/books?id=5TYdCAAAQBAJ&lpg=PP1&ots=ahZyJCYACo&dq=DerivativewithaNewParameter:Theory,MethodsandApplications&lr&hl=es&pg=PP1#v=onepage&q=DerivativewithaNewParameter:Theory,MethodsandApplications&f=false>.
- [3] Sroor M. Elnady, Mohamed El-Beltagy, Ahmed G. Radwan, and Mohammed E. Fouda. A generalized local fractional derivative with applications. *Journal of Computational Physics*, 530:113903, 2025. doi:10.1016/j.jcp.2025.113903.
- [4] Miguel Vivas Cortez, Paulo M Guzman, Luciano M Lugo, et al. Fractional calculus: Historical notes apuntes históricos del cálculo fraccionario. *Revista MATUA*, 8(2):35–45, 2021. <https://revistas.uniatlantico.edu.co/index.php/MATUA/article/download/3358/4117>.
- [5] Paulo M. Guzmán, Juan E. Nápoles Valdés, and Miguel Vivas-Cortez. A new generalized derivative and related properties. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 18(5):923 – 932, 2024. Cited by: 1. <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85197407952&doi=10.18576%2famis%2f180501&partnerID=40&md5=d5bb5b5961d9bef3c207f30b9014c4cd>, doi:10.18576/amis/180501.
- [6] Shilpi Jain, Miguel Vivas-Cortez, Parik Laxmi, Praveen Agarwal, and Shaher Momani. An extended laplace integral transform and its applications. *Fractals*, 33(6):2540124, July 2025. doi:10.1142/S0218348X25401243.
- [7] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, and M. Sababheh. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70, 2014. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042714000065>, doi:10.1016/j.cam.2014.01.002.
- [8] Miguel Vivas-Cortez, Harold David Jarrín, Fabián Ordoñez-Moreno, and Janneth Velasco-Velasco. A laplace transform approach to the biparametric v-derivative with applications in generalized calculus. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 19(6):1–13, November 2025. doi:10.18576/amis/190613.

- [9] Miguel Vivas-Cortez, Janneth Velasco-Velasco, and Harold David Jarrín. A new generalized local derivative of two parameters. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 19(3):713–723, May 2025. doi:10.18576/amis/190319.

Capítulo 63

Matemática Aplicada a la Computación: Retos y Oportunidades

Daniel Alexis Gutierrez Pachas
Universidad Católica San Pablo – Perú
E-mail: dgutierrezp@ucsp.edu.pe

Resumen

En esta ponencia discutiremos cómo abordar los fundamentos matemáticos de problemas complejos en computación. Presentaremos ejemplos prácticos de Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial y cómo su aplicación puede tener un impacto positivo en la sociedad.

Capítulo 64

El teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones en la clasificación de superficies

Dylan David Antequera Puyana

Universidad del Atlántico

E-mail: ddantequera@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

En el estudio de la geometría diferencial y la topología, el teorema de Gauss-Bonnet constituye uno de los resultados más profundos y reveladores, al establecer un puente natural entre las propiedades geométricas y topológicas de las superficies en \mathbb{R}^3 . Su formulación relaciona la integral de la curvatura gaussiana con la característica de Euler, mostrando cómo un concepto intrínsecamente geométrico se traduce en un invariante topológico. El objetivo de esta ponencia es mostrar cómo puede aplicarse este teorema para clasificar superficies según su curvatura, destacando su papel como vínculo entre la geometría y la topología.

La primera formulación del teorema se debe a Gauss [3], quien en 1827 demostró para triángulos geodésicos T que

$$\sum_{i=1}^3 \phi_i - \pi = \int_T K dA,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie. En términos simples, mostró que en superficies no planas (es decir, con $K \neq 0$) la suma de los ángulos internos difiere de π , en contraste con la geometría euclidiana clásica.

Posteriormente, Bonnet [5] extendió este resultado a regiones limitadas por curvas suaves no necesariamente geodésicas, obteniendo la versión local del teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema 1 (Versión local del teorema de Gauss-Bonnet). *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $R \subset S$ una región simplemente conexa con frontera ∂R formada por curvas suaves. Entonces,*

$$\int_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_j \theta_j = 2\pi,$$

donde k_g es la curvatura geodésica de la frontera y θ_j los ángulos exteriores en los vértices de la frontera.

Más adelante, Dyck [6] formuló en 1888 la versión global del teorema para superficies compactas orientables:

Teorema 2 (Teorema de Gauss–Bonnet (versión global)). *Sea S una superficie regular, compacta, conexa y orientable. Entonces,*

$$\int_S K \, dA = 2\pi\chi(S), \quad (64.1)$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler de S .

La característica de Euler es un invariante topológico, es decir, se conserva bajo homeomorfismos y permite determinar cuándo dos superficies son indistinguibles desde el punto de vista topológico. En particular, para superficies compactas, conexas y orientables, se obtiene una relación que permite conocer el número de agujeros de la superficie, denominado *género* y denotado por $g(S)$. Por ejemplo, una esfera tiene género 0 porque no posee agujeros, mientras que un toro (una superficie con forma de rosquilla) tiene género 1 por su único agujero central. Esta noción resulta fundamental, pues permite clasificar las superficies orientadas en función de su número de agujeros, cumpliéndose que

$$g(S) = \frac{2 - \chi(S)}{2}.$$

Así, la identidad (64.1) permite interpretar la curvatura total como un invariante topológico que clasifica las superficies según su geometría y su estructura global.

Palabras clave: Geometría diferencial, Topología, Curvatura gaussiana, Teorema de Gauss–Bonnet, Clasificación de superficies.

Bibliografía

- [1] M. P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, 2005.
- [2] M. Á. Hernández Cifre y J. A. Pastor González, *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*, CSIC, 2019.
- [3] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Dieterich, 1828.
- [4] H. H. Wu, *Historical development of the Gauss–Bonnet theorem*, Science in China Series A: Mathematics, **51**(4), 777, 2008.
- [5] O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, Tome 19, Cahier 32, 1–146, 1848.
- [6] W. von Dyck, *Beiträge zur Analysis Situs*, Mathematische Annalen, **32**, 457–512, 1888.
- [7] J. H. Gallier y D. Xu, *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*, Springer, 2013.
- [8] S. Montiel y A. Ros, *Curves and surfaces*, vol. 69, American Mathematical Society, 2009.

Capítulo 65

Un primer vistazo al grupo fundamental

Fredy Arturo Soto Valencia
Universidad del Atlántico
E-mail: fasoto@uniatlantico.edu.co

Resumen

La presente ponencia tiene como propósito introducir, de manera accesible y rigurosa, el concepto de **grupo fundamental** como uno de los invariantes más representativos de la topología algebraica. Este concepto permite estudiar las propiedades globales de los espacios topológicos a través de estructuras algebraicas, capturando la noción de “agujero” mediante un grupo asociado a cada espacio.

En esta exposición se abordará la motivación geométrica que da origen al grupo fundamental, a partir de las nociones de camino, lazo y homotopía, para luego presentar su definición formal y sus principales propiedades. Se discutirán ejemplos clásicos como el círculo S^1 , la esfera S^2 , el toro T^2 y el espacio en forma de “8”, destacando cómo el grupo fundamental distingue entre distintos tipos de conectividad y de agujeros topológicos.

Asimismo, se presentará el **Teorema de Van Kampen**, herramienta esencial para calcular el grupo fundamental de espacios compuestos, aplicándolo al caso $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, que ilustra el surgimiento del grupo libre en dos generadores. Finalmente, se señalarán las conexiones con la **clasificación de superficies** y las aplicaciones contemporáneas en **análisis topológico de datos** (TDA), donde los conceptos de homotopía y homología permiten detectar agujeros en conjuntos de datos.

Palabras clave: grupo fundamental, homotopía, topología algebraica, Teorema de Van Kampen, superficies.

Bibliografía

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] J. R. Munkres, *Topology*. 2nd Edition, Prentice Hall, 2000.

- [3] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1988.
- [4] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*. Springer, 1993.
- [5] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2010.
- [6] N. Otter, M. A. Porter, U. Tillmann, P. Grindrod, H. A. Harrington, *A roadmap for the computation of persistent homology*. EPJ Data Science, 2017.

Capítulo 66

Aplicaciones de las bases de Gröbner para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales multivariadas

Edgar Alejandro Triana Quiñones

Universidad del Atlántico

E-mail: eatriana@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

La noción de Base de Gröbner fue introducida por el matemático austriaco Bruno Buchberger junto con su asesor doctoral Wolfgang Gröbner en 1965. Si bien años atrás (1903) David Hilbert había mostrado una prueba no constructiva en [3] de la finitud de una base de un ideal I contenido en $K[x_1, \dots, x_n]$, Bruno Buchberger revolucionó la geometría algebraica con las bases de Gröbner. Además de proporcionar una base para un ideal I , este conjunto de polinomios tiene propiedades que permiten resolver diversos problemas. Entre ellos, la pertenencia a un ideal en álgebra conmutativa y la simplificación de sistemas de ecuaciones polinomiales en geometría algebraica. Estas aplicaciones tienen impacto en diversas áreas matemáticas, por mencionar algunas de ellas, en Optimización (problemas PLE, Multiplicadores de Lagrange), en teoría de Grafos con el problema de los tres colores. El objetivo de esta ponencia es presentar estrategias para resolver sistemas de ecuaciones polinomiales usando bases de Gröbner con ejemplos ilustrativos y que pongan de manifiesto el poder de usarlas.

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$f_1 = 0; f_2 = 0; \dots; f_s = 0 \quad (66.1)$$

donde $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ y k es un cuerpo, para casos prácticos tomaremos $k = \mathbb{C}$. Consideremos también el ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. Generando una base de Gröbner $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\}$ para I , donde $g_1, \dots, g_t \in I$, obtendremos que G es otra base para I (para más información sobre bases de Gröbner y sus propiedades, ver [2] y [1]), de esta forma $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, de aquí que sus variedades afines sean iguales,

$$V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t).$$

Así, resolver el sistema (66.1) es equivalente a resolver el sistema

$$g_1 = 0; g_2 = 0; \cdots; g_t = 0; \quad (66.2)$$

En un principio esto puede parecer más complicado de resolver si $t > s$, ya que se obtendrían más ecuaciones de las que en un principio se trataban de resolver. Usando el orden monomial lexicográfico (lex), es posible triangular el sistema en términos de las variables, obteniendo una forma escalonada que facilita su resolución.

En situaciones en donde el sistema de ecuaciones polinomiales (66.1) parece laborioso de resolver, resulta conveniente considerar si dicho sistema tiene en un principio solución. Del teorema de los ceros de Hilbert (o Nullstellensatz) débil tenemos que si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, entonces

$$I \neq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] \Rightarrow \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \neq \emptyset$$

Observación: La base de Gröbner reducida para $I = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ respecto al orden lexicográfico es $G = \{1\}$.

Por consiguiente, tenemos el siguiente **algoritmo de consistencia:** si queremos saber si el sistema de ecuaciones (66.1) con $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, tiene al menos una solución, calculamos su base de Gröbner reducida G del ideal $\langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$.

- Si $G = \{1\}$, entonces el ideal $I = \langle 1 \rangle$, es todo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, lo que implica que los polinomios no tienen ceros en común en \mathbb{C} .
- Si $G \neq \{1\}$, los polinomios tienen un zero en común en \mathbb{C} , por el Nullstellensatz débil.

Las bases de Gröbner son una herramienta fundamental en álgebra computacional, proporcionando un método sistemático para la resolución de sistemas polinomiales con aplicaciones en múltiples áreas de las matemáticas y la computación. Además, las bases de Gröbner han encontrado aplicaciones en campos como la criptografía, la robótica y la biología computacional, donde se utilizan para resolver sistemas polinomiales en contextos prácticos.

Palabras clave: Nullstellensatz débil, bases de Gröbner, variedades afines, sistemas de ecuaciones polinómicas.

Bibliografía

- [1] W. W. Adams and P. Loustaunau. *An Introduction to Gröbner Bases, volume 3. American Mathematical Society, 2022.*
- [2] D. A. Cox, J. B. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, fourth edition, 2015.*
- [3] D. Hilbert. *Über die theorie der algebraischen formen. 1890.*
- [4] S. Malik, J. N. Mordeson, and M. K. Sen. *Fundamentals of Abstract Algebra. McGraw- Hill, 1997.*

Capítulo 67

Sobre espectros de operadores, propiedades espectrales y ν -convergencia

Carlos Rafael Carpintero Figueroa

Corporación Universitaria del Caribe-CECAR. Sincelejo. Sucre

E-mail: carlos.carpintero@cecar.edu.co

Resumen

Sea $L(X)$ el álgebra de todos los operadores lineales y acotados que actúan de un espacio de Banach X en sí mismo. Una sucesión $\{S_n\} \subset L(X)$ se dice ν -convergente a $S \in L(X)$, denotado $S_n \xrightarrow{\nu} S$, si $\{S_n\}$ es acotada y además $\|(S_n - S)S\| \rightarrow 0$ y $\|(S_n - S)S_n\| \rightarrow 0$, donde $\|\cdot\|$ es la norma usual sobre $L(X)$ ([3]). Observe que este tipo de convergencia es más bien una pseudo convergencia, en el sentido que puede darse el caso que $S_n \xrightarrow{\nu} S$ y $S_n \xrightarrow{\nu} T$, pero $S \neq T$. En esta ponencia exhibimos que si una sucesión $\{S_n\} \subset L(X)$ es ν -convergente a S y T , entonces S y T tienen los mismos espectros (tanto los clásicos, como los de Fredholm y Fredholm generalizados) y además idénticas propiedades espectrales ([2]). Presentamos también ejemplos ilustrativos y además se dan algunas consecuencias de este hecho relacionadas con la continuidad de multifunciones asociadas al espectro clásico y los espectros Fredholm y Fredholm generalizados ([1]).

Palabras Clave: ν -convergence, operator spectra, type Weyl properties, multifunction.

Bibliografía

- [1] C. Carpintero, O. García, E. Rosas y Y. Salazar, A note on spectral properties and ν -convergence, *Filomat*, submitted, 2025.
- [2] C. Carpintero, E. Rosas, O. García, J. Sanabria y A. Malaver, On the hereditary character of certain spectral properties and some applications, *Proyecciones* 40(5), pp. 1053-1069, 2021.
- [3] S. Sánchez-Perales, S. Palafoxa, T. Pérez-Becerra, On the spectral ν -continuity, *Filomat* 39(9), pp. 2831-2843, 2025.

Capítulo 68

Dominios de Dedekind

Ángel Martínez Avelar

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

E-mail: avelar@xanum.uam.mx

Resumen

Los dominios de Dedekind constituyen una de las estructuras fundamentales en la teoría algebraica de números, al extender la noción de factorización única más allá del anillo de los enteros. En esta ponencia se introducirá el concepto de dominio de Dedekind desde un punto de vista algebraico y se mostrará su relevancia como marco para el estudio de los anillos de enteros en campos de números. Se analizarán propiedades esenciales como la factorización única de ideales en productos de ideales primos, la existencia de ideales invertibles y la relación con el grupo de clases. Asimismo, se presentarán ejemplos concretos en extensiones cuadráticas donde se explora la pérdida de factorización única y cómo ésta se recupera a nivel de ideales. La charla buscará ofrecer una conexión entre la teoría abstracta y la intuición aritmética, mostrando cómo los dominios de Dedekind reflejan de forma elegante la estructura algebraica subyacente en los campos de números.

Palabras Clave: Dominio de Dedekind, factorización única, grupo de clases, teoría algebraica de números.

Bibliografía

- [1] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1999.
- [2] D. A. Marcus, *Number Fields*, Springer, 1977.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

Capítulo 69

Análisis y Pronóstico de la Cantidad de Ataques de Violencia Intrafamiliar en el Departamento de Córdoba

Thalía Arrieta Monterroza

Universidad de Córdoba

E-mail: tarrietamonterroza59@correo.unicordoba.edu.co

Ruth Andrea Hernández Pestana

Universidad de Córdoba

E-mail: rhernandezpestana86@correo.unicordoba.edu.co

Resumen

La violencia intrafamiliar en Colombia ha sido un fenómeno que sigue latente al pasar de los años ([5]). Este estudio se enfoca en el análisis, modelado y predicción de la cantidad de casos mensuales de violencia intrafamiliar en el Departamento de Córdoba desde el año 2010 hasta el mes de septiembre de 2024. La metodología empleada incluye depuración de los datos obtenidos de las estadísticas delictivas de la policía nacional ([3]), con 177 observaciones mensuales, se utilizaron herramientas como Microsoft Excel y RStudio para procesamiento y modelado, se aplicaron estadísticas descriptivas y análisis de series temporales, donde se incluyó la aplicación de modelos *ARIMA*, *SARIMA* y un *AUTOARIMA*. Se evaluaron tres diferentes horizontes de pronóstico ($H = 12$, $H = 8$ y $H = 6$), encontrando que el modelo SARIMA con horizonte de seis meses presentó las mejores métricas de desempeño (*RMSE*, *MAE* y *MAPE*) y mejor ajuste a los datos.

Los resultados preliminares evidencian un patrón estacional que ocurre en ciertos meses del año, también se pudo observar que la tendencia de los casos reportados tiende a aumentar. Esta investigación aporta una herramienta estadística útil para la toma de decisiones y la formación de políticas públicas, con la finalidad de orientar a los ciudadanos acerca de la problemática, asimismo, a la creación de estrategias para que las personas afectadas denuncien a sus agresores en pro de reducir la violencia intrafamiliar en el departamento.

Palabras Clave: Violencia intrafamiliar, series de tiempo, pronóstico, modelo SARIMA, Córdoba.

Bibliografía

- [1] I. Cerna-Turoff, R. Nyakuwa, E. Turner *et al.*, Confinamiento nacional por COVID-19 y tendencias en la búsqueda de ayuda para casos de violencia contra los niños en Zimbabue: un análisis de series temporales interrumpidas, *BMC Public Health* **22**, 2116 (2022). <https://doi.org/10.1186/s12889-022-14425-w>
- [2] D. Londoño, E. Palacio, A. Preciado, E. Henao, J. Salazar, D. Balbín, D. Restrepo, J. Mira, & F. Gutiérrez, Comportamiento delictivo en Medellín en tiempos de pandemia, un modelo espacio-temporal, *Estudios Gerenciales* **37**(159), 196–207 (2021). <https://doi.org/10.18046/j.estger.2021.159.4186>
- [3] Policía Nacional de Colombia, *Violencia Intrafamiliar*, consultado el 11 de septiembre de 2025. (2024). <https://www.policia.gov.co/estadistica-delictiva?page=1>
- [4] H. Seyidoglu, G. Farrell, A. Dixon *et al.*, Tendencias delictivas pospandémicas en Inglaterra y Gales, *Crime Science* **13**, 6 (2024). <https://doi.org/10.1186/s40163-024-00201-1>
- [5] C. Rodríguez, Violencia intrafamiliar y transferencias monetarias condicionadas: El impacto de Familias en Acción en Colombia, Documento de trabajo del BID N^o IDB-WP-621, Banco Interamericano de Desarrollo, Octubre 2015. <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/146432/1/IDB-WP-621.pdf>

Capítulo 70

Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo y la estabilidad

Jaqueline Godoy Mesquita
Universidade de Campinas
E-mail: jgodoymesquita@gmail.com

Resumen

Esta ponencia ofrece una introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo y a los principales conceptos de estabilidad asociados a este tipo de modelos. Se presentan las ecuaciones diferenciales funcionales como una generalización natural de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en las que la evolución del sistema no depende únicamente del estado actual, sino también de estados pasados, modelados a través de distintos tipos de retardos.

Se discuten diversas clases de ecuaciones con retardo, incluyendo retardos discretos, retardos distribuidos (finitos e infinitos), retardos dependientes del tiempo y del estado, así como ecuaciones del tipo neutro. A partir de una breve retrospectiva histórica, se destacan contribuciones fundamentales en el desarrollo de la teoría, junto con la motivación biológica que dio origen a muchos de estos modelos.

Como aplicación central, se analizan modelos poblacionales clásicos y contemporáneos, tales como el modelo malthusiano, la ecuación logística y la ecuación de Hutchinson, resaltando el papel del retardo asociado al tiempo de maduración y su influencia en la aparición de oscilaciones poblacionales. Asimismo, se presentan modelos con retardo dependiente del estado, motivados por fenómenos biológicos en los que el tiempo de maduración varía según la densidad poblacional o la disponibilidad de recursos.

Finalmente, se mencionan aplicaciones adicionales de las ecuaciones diferenciales con retardo en áreas como redes neuronales, modelos epidemiológicos, proliferación de células cancerosas e ingestión de medicamentos, y se señalan algunas líneas de investigación abiertas, en particular aquellas relacionadas con ecuaciones funcionales de tipo neutro y con retardos dependientes del estado.

Palabras clave Ecuaciones diferenciales con retardo; ecuaciones diferenciales funcionales; estabilidad; modelos poblacionales; retardo dependiente del estado.

Capítulo 71

Desarrollo de una herramienta computacional para la simulación de flujos con discontinuidades mediante la solución numérica de problemas de Riemann en 1D y 2D

Gabriel Antonio Chavarro Avellaneda

Universidad Industrial de Santander

E-mail: gabriel.chavarro@correo.uis.edu.co

Jorge Villamizar Morales

Universidad Industrial de Santander

E-mail: jorge@uis.edu.co

Oswaldo Alonso Nieto Narvaez

Universidad Industrial de Santander

E-mail: oswaldonieto.22@gmail.com

Resumen

Las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos, como las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Euler en el caso de flujos compresibles, son sistemas no lineales que, en la mayoría de los casos, no poseen soluciones analíticas exactas. Debido a la complejidad de estos fenómenos, el desarrollo de métodos numéricos se ha convertido en una herramienta fundamental para su estudio.

La física computacional de fluidos es una disciplina clave en la ingeniería y las ciencias aplicadas, ya que permite analizar y predecir el comportamiento de los fluidos en escenarios complejos donde los métodos analíticos resultan insuficientes. En este contexto, la simulación computacional juega un papel crucial al permitir la resolución numérica de estas ecuaciones, proporcionando aproximaciones precisas y facilitando la comprensión de fenómenos como ondas de choque, turbulencias, y flujos en medios heterogéneos.

Dado su impacto en diversas áreas como la aerodinámica, la ingeniería mecánica, la meteorología y la astrofísica, el desarrollo de algoritmos eficientes para la simulación de flujos compresibles

se ha convertido en un área de investigación de gran relevancia. Por esta razón, la implementación de un código numérico optimizado, basado en el método de volúmenes finitos y esquemas de alta resolución, permitirá mejorar la captura de discontinuidades y aumentar la precisión en la modelación de estos sistemas complejos.

Palabras Clave/keywords: Física computacional, dinamica de fluidos, Navier-Stokes, volúmenes finitos, discontinuidades.

Bibliografía

- [1] Kleppner, Daniel and Kolenkow Robert J., "An Introduction to Mechanics", McGraw Hill, 1973
- [2] Wendt, John F. and Anderson, John D., "Computational Fluid Dynamics: An Introduction", Springer, 2009
- [3] Anderson, John D., "Computational Fluid Dynamics", McGraw-Hill, 1995
- [4] 2016. Modelling long GRBs using a single shock with relativistic radiation hydrodynamics.
- [5] 2004. Propagation and dynamics of relativistic jets. The Astrophysical Journal
- [6] 2017. Thermal and non-thermal emission from the cocoon of a gamma-ray burst jet. ArXiv e-prints.
- [7] 1986. Foundations of radiation hydrodynamics.

Capítulo 72

Aspectos y generalidades de la teoría de Morse discreta

Dairo José Hernández Páez

Universidad de La Guajira

E-mail: djhernandezp@uniguajira.edu.co

Julio Deluque Gomez

Universidad de La Guajira

E-mail: jdeluque@uniguajira.edu.co

Resumen

La teoría de Morse discreta, introducida por Forman, es un marco combinatorio para estudiar la forma de un espacio finito mediante funciones tipo Morse definidas sobre complejos celulares o simpliciales [1]. Una función de Morse discreta induce un campo de gradiente, entendido como un emparejamiento acíclico en el diagrama de Hasse; sus celdas críticas concentran la información topológica esencial y generan un complejo de Morse reducido, con el mismo tipo de homotopía que el complejo original [1, 2].

Este enfoque permite formular versiones discretas de las desigualdades de Morse y construir contracciones explícitas que simplifican el cálculo de invariantes topológicos, tales como números de Betti y grupos de homología, así como el procesamiento de datos geométricos [3].

En esta ponencia presentaremos, de manera autocontenida y accesible, los conceptos básicos de la teoría: funciones de Morse discretas, campos de gradiente, cancelaciones y complejos de Morse. Ilustraremos los teoremas centrales mediante ejemplos elementales, incluyendo grafos, rejillas bidimensionales y tridimensionales, y complejos simpliciales provenientes de datos. Asimismo, mostraremos cómo las reducciones de Morse se conectan con tareas computacionales como la simplificación de mallas, el cálculo de homología y homología persistente, y la depuración de ruido en filtraciones [2, 5]. Cerraremos con una breve guía sobre implementaciones disponibles y algunas líneas actuales de investigación en topología computacional [4, 5].

Objetivo: Ofrecer una panorámica clara de los principios y el alcance de la teoría de Morse discreta, destacando sus ideas geométricas fundamentales y su utilidad algorítmica en problemas

de topología computacional y análisis de datos.

Público objetivo: Estudiantes avanzados y docentes o investigadores con interés en topología algebraica, combinatoria, geometría computacional o ciencia de datos. No se requieren antecedentes continuos de la teoría clásica de Morse.

Palabras clave: Morse discreta; campos de gradiente; complejos celulares y simpliciales; números de Betti; homología (persistente); simplificación de complejos.

Modo de participación: Ponencia.

Área sugerida: Topología algebraica y computacional.

Bibliografía

- [1] R. Forman, *Morse Theory for Cell Complexes*, *Advances in Mathematics*, 134(1), pp. 90–145, 1998.
- [2] R. Forman, *A User's Guide to Discrete Morse Theory*, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 48, Article B48c, 2002.
- [3] M. K. Chari, *On Discrete Morse Functions and Combinatorial Decompositions*, *Discrete Mathematics*, 217(1–3), pp. 101–113, 2000.
- [4] D. Kozlov, *Combinatorial Algebraic Topology*, Springer, 2008.
- [5] H. Edelsbrunner and J. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.

Capítulo 73

Modelo matemático para la interacción áfidos–coccinélidos con respuesta funcional tipo Crowley–Martin

Carlos Andrés Trujillo-Salazar

Corporación Universitaria Empresarial Alexander von Humboldt

E-mail: ctrujillo@cue.edu.co

Pedro Elías Martínez-Álvarez

Universidad del Quindío

E-mail: pemartinez@uniquindio.edu.co

Resumen

Los áfidos constituyen uno de los principales enemigos de los cultivos agrícolas a escala global: se alimentan del floema de las plantas y son vectores de múltiples virus y enfermedades que reducen la productividad de cultivos de alto valor económico. Además, su elevada tasa reproductiva y ciclo biológico rápido, junto con la capacidad para evolucionar resistencia a insecticidas, convierten a los áfidos en un desafío permanente para el manejo integrado de plagas [1, 13]. El uso intensivo de plaguicidas contribuye, además, a efectos ecológicos adversos que incluyen la disminución de enemigos naturales y pérdidas de biodiversidad en paisajes agrarios, lo cual puede agravar los problemas de control y sostenibilidad [4, 5].

Los coccinélidos (Coleoptera: *Coccinellidae*) son depredadores clave de áfidos y han sido ampliamente reconocidos y utilizados como agentes de control biológico en sistemas agrícolas [10]. Sin embargo, se han reportado declives locales y fluctuaciones en la abundancia de coccinélidos en ciertos agroecosistemas, lo que subraya la necesidad de comprender mejor su dinámica poblacional y las condiciones que favorecen su persistencia y servicio de control biológico [6].

Biológicamente, tanto las larvas como los adultos de muchas especies de coccinélidos consumen áfidos, pero cumplen roles tróficos diferenciados: las larvas suelen presentar tasas de consumo altas asociadas al crecimiento y desarrollo, mientras que los adultos, además de depredar, contribuyen a la reproducción mediante la puesta de huevos. Desde la modelación, esta dualidad funcional justifica el uso de formulaciones que distinguen etapas o procesos (maduración, conver-

sión de biomasa) en el depredador, en lugar de modelos presa–depredador de una sola ecuación por especie [8, 10].

Los modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias son herramientas robustas para representar interacciones tróficas y explorar umbrales críticos y transiciones dinámicas (equilibrios, estabilidad, bifurcaciones) con implicaciones en la toma de decisiones para el manejo agroecológico [7, 11]. No obstante, los términos de interacción bilineales (acción de masas), aunque útiles como aproximación inicial, pueden sobreestimar la depredación a altas densidades de presa y dejar fuera efectos de saturación y de interferencia entre depredadores [2, 9].

Para representar de forma más realista la dependencia de la tasa de ataque tanto de la densidad de presa como de la densidad de depredadores, se emplea la respuesta funcional tipo Crowley–Martin [2, 3]. Estudios recientes han mostrado que su incorporación puede modificar sustancialmente la dinámica del sistema, alterando la estabilidad de los equilibrios y promoviendo la aparición de bifurcaciones y ciclos límite [3, 9, 12].

En este trabajo se propone un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para describir la interacción áfidos–coccinélidos, en el cual los depredadores se dividen en dos estados biológicos (inmaduros y adultos) conectados mediante un proceso de maduración. Se analizan la positividad y acotamiento de las soluciones, la estabilidad local de los puntos de equilibrio y las condiciones bajo las cuales pueden presentarse bifurcaciones. Posteriormente, se introduce una extensión que reemplaza los términos bilineales por una respuesta funcional tipo Crowley–Martin, cuya principal ventaja es que permite representar simultáneamente la saturación por densidad de presa y la interferencia entre depredadores, lo cual se ajusta de manera más realista al comportamiento de las poblaciones consideradas. Los resultados obtenidos se ilustran mediante simulaciones numéricas y se interpretan a la luz de la teoría ecológica de poblaciones.

Palabras Clave: modelo presa–depredador, coccinélidos, áfidos, respuesta funcional Crowley–Martin, estabilidad, bifurcaciones.

Bibliografía

- [1] Bass, C., Puinean, A., Zimmer, C., Denholm, I., Field, L., Foster, S., Gutbrod, O., Nauen, R., Slater, R., & Williamson, M. (2014). The evolution of insecticide resistance in the peach–potato aphid, *Myzus persicae*. *Insect Biochemistry and Molecular Biology*, 51, 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ibmb.2014.05.003>
- [2] Crowley, P., & Martin, E. (1989). Functional responses and interference within and between year classes of a dragonfly population. *Journal of the North American Benthological Society*, 8(3), 211–221. <https://doi.org/10.2307/1467324>
- [3] Dong, Y., Zhang, S., Li, S., & Yan, L. (2015). Qualitative analysis of a predator–prey model with Crowley–Martin functional response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 25(9), 1550110. <https://doi.org/10.1142/S0218127415501102>
- [4] Geiger, F., Bengtsson, J., Berendse, F., Weisser, W., Emmerson, M., Morales, M., Ceryngier, P., Liira, J., Tschardtke, T., & Winqvist, C. (2010). Persistent negative effects of pesticides

- on biodiversity and biological control potential on European farmland. *Basic and Applied Ecology*, 11(2), 97–105. <https://doi.org/10.1016/j.baae.2009.12.001>
- [5] Goulson, D., Nicholls, E., Botía, C., & Rotheray, E. (2015). Bee declines driven by combined stress from parasites, pesticides and lack of floral resources. *Trends in Ecology & Evolution*, 30(9), 581–591. <https://doi.org/10.1126/science.1255957>
- [6] Hesler, L. (2021). Declining abundance of Coccinellidae (Coleoptera) among crop and prairie habitats of eastern South Dakota, USA. *Frontiers in Conservation Science*, 2, 742036. <https://doi.org/10.3389/fcosc.2021.742036>
- [7] Hirsch, M., Smale, S., & Devaney, R. (2013). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.
- [8] Li, N., Sun, W., & Liu, S. (2023). A stage-structured predator–prey model with Crowley–Martin functional response. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, 28(8), 4362–4381. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022177>
- [9] Meng, X., Tang, Y., & Zhao, X. (2014). Stability in a predator–prey model with Crowley–Martin functional response. *Applied Mathematics and Computation*, 245, 439–452. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.139>
- [10] Obrycki, J., & Kring, T. (1998). Predaceous Coccinellidae in biological control. *Annual Review of Entomology*, 43, 295–321. <https://doi.org/10.1146/annurev.ento.43.1.295>
- [11] Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Chapman and Hall/CRC.
- [12] Tripathi, J., Tyagi, S., & Abbas, S. (2016). Global analysis of a delayed density-dependent predator–prey model with Crowley–Martin functional response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 34, 58–78. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.06.008>
- [13] van Emden, H., & Harrington, R. (2007). *Aphids as Crop Pests*. Wallingford, UK: CABI Publishing.

Capítulo 74

Análisis topológico de datos: teoría y práctica

Jose Perea

Northeastern University

E-mail: j.pereabenez@northeastern.edu

Resumen

La topología es la rama de las matemáticas que estudia las formas y sus propiedades espaciales. En esta charla mostraré cómo varias ideas de la topología algebraica clásica se pueden utilizar en problemas de análisis de datos y aprendizaje de máquinas, incluyendo la reducción de dimensionalidad, el análisis de series temporales y la alineación de datos.



$$y = 19$$

314

$$f(x) = \sin x$$