 Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020
AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO	

xAutor1

Puerto Colombia, **FECHA**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Ciudad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **NOMBRE COMPLETO.**, identificado(a) con **C.C. No. NÚMERO DE CÉDULA.** de **CIUDAD**, autor(a) del trabajo de grado titulado **INSERTAR AQUÍ TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO** presentado y aprobado en el año **AÑO** como requisito para optar al título Profesional de **TÍTULO QUE OTORGA LA UA.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.


Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma

NOMBRE COMPLETO.

C.C. No. NÚMERO DE CÉDULA. de **CIUDAD**

 Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020
AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO	

Autor2

Puerto Colombia, **FECHA**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **NOMBRE COMPLETO.**, identificado(a) con **C.C. No. NÚMERO DE CÉDULA.** de **CIUDAD**, autor(a) del trabajo de grado titulado **INSERTAR AQUÍ TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO** presentado y aprobado en el año **AÑO** como requisito para optar al título Profesional de **TÍTULO QUE OTORGA LA UA.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,

Firma

NOMBRE COMPLETO.

C.C. No. NÚMERO DE CÉDULA. de **CIUDAD**

 Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-110
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020
DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO	

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **FECHA**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	
Programa académico:	

Firma de Autor 1:								
Nombres y Apellidos:								
Documento de Identificación:	CC		CE		PA		Número:	
Nacionalidad:						Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:								
Teléfono:					Celular:			

Firma de Autor 2:								
Nombres y Apellidos:								
Documento de Identificación:	CC		CE		PA		Número:	
Nacionalidad:						Lugar de residencia:		
Dirección de residencia:								
Teléfono:					Celular:			

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	TITULO COMPLETO.
AUTOR(A) (ES)	NOMBRE COMPLETO.
DIRECTOR (A)	NOMBRE COMPLETO.
CO-DIRECTOR (A)	NOMBRE COMPLETO.
JURADOS	NOMBRES COMPLETOS.
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	TITULO QUE OTORGA LA UA.
PROGRAMA	ELIJA EL PROGRAMA
PREGRADO / POSTGRADO	ELIJA NIVEL DE FORMACIÓN
FACULTAD	ELIJA LA FACULTAD
SEDE INSTITUCIONAL	NOMBRE DE LA SEDE.
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	AÑO
NÚMERO DE PÁGINAS	NÚMERO DE PÁGINAS.
TIPO DE ILUSTRACIONES	DESCRIBIR TIPO DE ILUSTRACIONES: Ilustraciones, Mapas, Retratos, Tablas, gráficos y diagramas, Planos, Láminas y/o Fotografías (Si aplica, sino usa No Aplica)
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	Elija un elemento.
PREMIO O RECONOCIMIENTO	APOYO ECONOMICO RECIBIDO EN CONVOCATORIA, MERITORIA, LAUREADA (Si aplica, sino usa No Aplica)



TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO

NOMBRE DEL AUTOR(A)

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

**PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
PUERTO COLOMBIA**

2025



TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO

NOMBRE DEL AUTOR(A)

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MATEMÁTICO

NOMBRE DEL ASESOR(A)

ÚLTIMO TÍTULO DEL ASESOR(A)

**PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
PUERTO COLOMBIA**

2025

NOTA DE ACEPTACIÓN

DIRECTOR(A)

JURADO(A)S

Agradecimientos

El siguiente texto es únicamente un ejemplo. Cada estudiante debe sentirse libre de expresar sus agradecimientos de la manera que considere más adecuada, incluyendo o excluyendo personas e instituciones según corresponda.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la culminación de este trabajo de grado. La realización de un proyecto académico de esta naturaleza no es solo el resultado del esfuerzo individual, sino también de la suma de apoyos, consejos, enseñanzas y acompañamiento recibido durante todo el proceso de formación. Sin este respaldo, la experiencia habría sido mucho más difícil y menos enriquecedora.

En primer lugar, agradezco a la Universidad del Atlántico y al Programa de Matemáticas por ofrecerme la oportunidad de desarrollar mis estudios y por brindarme un espacio académico en el que pude crecer tanto en el ámbito personal como en el profesional. Este trabajo es también fruto de la infraestructura, las oportunidades de aprendizaje y el compromiso institucional con la formación de calidad.

De manera especial, quiero reconocer a mi director(a) de trabajo de grado y a los jurados, quienes con sus orientaciones, críticas constructivas y valiosos comentarios guiaron cada etapa del desarrollo de esta investigación. Sus aportes han sido esenciales no solo para mejorar la calidad del documento, sino también para fortalecer mi capacidad de análisis y de investigación.

Extiendo mi gratitud a todos mis docentes, quienes a lo largo de la carrera compartieron con dedicación y generosidad sus conocimientos. Cada asignatura, cada clase y cada consejo aportaron a mi formación, dejando huellas que trascienden lo académico y que han enriquecido mi visión del mundo y de las matemáticas.

Asimismo, deseo agradecer a mis compañeros y amigos, con quienes compartí innumerables horas de estudio, discusiones académicas y también momentos de esparcimiento. Su compañía y apoyo en los momentos de dificultad fueron fundamentales para mantener la motivación y el entusiasmo en el trayecto académico.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a mi familia, que con paciencia, comprensión y apoyo incondicional estuvo presente en cada etapa de este camino. Su confianza, amor y respaldo han sido el motor principal que me ha impulsado a seguir adelante y a alcanzar esta meta.

Resumen

Nombre del Autor(a). **Título del Trabajo de Grado.** Anteproyecto - Facultad de Ciencias Básicas, Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Colombia, 2025.

La descomposición QR es una de las herramientas fundamentales en el álgebra lineal numérica, utilizada ampliamente en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, problemas de mínimos cuadrados y en la determinación de valores propios. En este trabajo se estudian dos métodos clásicos para obtener dicha factorización: el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y las transformaciones de Householder. El primero permite construir una base ortonormal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, garantizando una factorización directa y conceptualmente clara. El segundo, basado en reflexiones ortogonales, ofrece un procedimiento más estable desde el punto de vista numérico y eficiente para cálculos computacionales. Se presentan las ideas teóricas básicas de cada método, así como ejemplos de aplicación y análisis comparativo de sus ventajas y limitaciones.

Palabras clave: Descomposición QR, Gram-Schmidt, Transformaciones de Householder, Álgebra Lineal Numérica.

Abstract

Nombre del Autor(a). **Título del Trabajo de Grado en Inglés.** Undergraduate Thesis
- Faculty of Basic Sciences, Mathematics Program, University of Atlántico, Colombia,
2025.

The QR decomposition is one of the fundamental tools in numerical linear algebra, widely used in solving systems of linear equations, least squares problems, and eigenvalue computations. This work studies two classical methods to obtain such factorization: the Gram–Schmidt orthonormalization process and Householder transformations. The first method builds an orthonormal basis from a set of linearly independent vectors, providing a direct and conceptually clear factorization. The second method, based on orthogonal reflections, offers greater numerical stability and efficiency for computational purposes. Theoretical foundations of each method are presented, along with illustrative examples and a comparative analysis of their advantages and limitations.

Keywords: QR Decomposition, Gram–Schmidt, Householder Transformations, Numerical Linear Algebra.

Índice general

Lista de Figuras	v
Lista de Tablas	vi
Lista de Símbolos	vii
Introducción	1
1. Transformaciones de Householder	4
1.1. Concepto de Reflexión de Householder	4
1.2. Construcción de la Descomposición QR	5
1.3. Ilustración	9
2. Referencias bibliográficas en \LaTeX	11
2.1. Archivos .bib	11
2.2. Citas en el texto	12
3. Figuras y Tablas en \LaTeX	13
3.1. Insertar figuras	13
3.2. Tablas en \LaTeX	14
3.3. Figuras usando el entorno <code>tabular</code>	16
4. Conclusiones y Aplicaciones	17
4.1. Conclusiones Generales	17
4.2. Aplicaciones de la Descomposición QR	18
Referencias	19

Lista de Figuras

- 2.1. Búsqueda en Google Scholar 11
- 2.2. Citas en Google Scholar 12
- 3.1. Ejemplo de figura en \LaTeX 13
- 3.2. Ejemplo de tres imágenes en un solo entorno figure: proporción observada de seropositivos para las tres enfermedades consideradas en la Tabla 3.3. 16

Lista de Tablas

- 3.1. Ejemplo de tabla básica. 14
- 3.2. Ejemplo de una tabla mas elaborada. 15
- 3.3. Ejemplo de tabla con tamaño ajustado a los margenes del documento. 15

Lista de Símbolos

α	Ángulo de rotación
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
A^T	Matriz transpuesta de A
$\ \cdot\ $	Norma en un espacio vectorial
λ	Valor propio asociado a una matriz
I_n	Matriz identidad de tamaño $n \times n$

to my family

Introducción

La descomposición QR es una de las herramientas más importantes del álgebra lineal numérica y ocupa un lugar central en el análisis de métodos computacionales aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, problemas de mínimos cuadrados y cálculo de valores y vectores propios. Su relevancia radica en que permite reescribir una matriz dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como el producto de dos matrices: una matriz ortogonal (o unitaria en el caso complejo) y una matriz triangular superior. Esta factorización no solamente proporciona una descripción estructural de A , sino que también ofrece ventajas desde el punto de vista numérico y computacional.

De manera general, se busca escribir

$$A = QR, \tag{i.1}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz ortogonal que satisface $Q^T Q = I$, y $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz triangular superior. En el caso en que A tenga rango completo y $m \geq n$, la factorización se puede restringir a una forma más compacta en la que Q es de dimensión $m \times n$ con columnas ortonormales y R es una matriz $n \times n$ triangular superior.

La descomposición QR tiene múltiples aplicaciones prácticas. Una de las más conocidas aparece en la resolución de problemas de *mínimos cuadrados*, en los que se busca aproximar una solución a un sistema $Ax \approx b$ que, en general, no tiene solución exacta debido a que b no pertenece al subespacio generado por las columnas de A . Al escribir $A = QR$, el problema se transforma en resolver

$$\min_x \|Ax - b\|_2 = \min_x \|QRx - b\|_2,$$

lo cual, gracias a la ortogonalidad de Q , se simplifica a un problema con R , que es triangular superior y mucho más fácil de manejar computacionalmente.

Otra aplicación fundamental de la descomposición QR está en los algoritmos de valores propios. El método iterativo conocido como *algoritmo QR* emplea reiteradamente la factorización QR para aproximar los autovalores de una matriz, lo cual constituye uno de los algoritmos más importantes y robustos en el campo de la computación científica.

Existen diversos métodos para calcular la descomposición QR. Entre los más estudiados y utilizados se encuentran el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt y las transformaciones de Householder.

El método de Gram–Schmidt es un procedimiento clásico que permite construir, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, una base ortonormal del subespacio que estos generan. Sea

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

una matriz con columnas a_i en \mathbb{R}^m . El algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Se toma $q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.

2. Para $k \geq 2$, se define

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j \rangle q_j, \quad q_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}.$$

De esta forma, se obtiene una matriz $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ con columnas ortonormales, y la matriz triangular R queda definida a partir de los coeficientes $\langle a_k, q_j \rangle$. La principal ventaja del método es su interpretación geométrica clara y su sencillez conceptual. Sin embargo, presenta desventajas numéricas: en presencia de redondeo, puede perder ortogonalidad, por lo que existen versiones modificadas del algoritmo que buscan mejorar su estabilidad.

El método de las transformaciones de Householder utiliza reflexiones ortogonales para transformar la matriz A en una forma triangular superior. Una reflexión de Householder se construye a partir de un vector $v \in \mathbb{R}^m$, y está definida por la matriz

$$H = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}.$$

Dicha matriz es simétrica y ortogonal, y tiene la propiedad de reflejar un vector con respecto al subespacio ortogonal a v .

En el contexto de la factorización QR, se busca una secuencia de transformaciones H_1, H_2, \dots, H_k tales que

$$H_k \cdots H_2 H_1 A = R,$$

donde R es triangular superior. Como consecuencia, se tiene que

$$A = (H_1 H_2 \cdots H_k)^T R,$$

lo cual proporciona la factorización deseada con $Q = (H_1 H_2 \cdots H_k)^T$. Este método resulta mucho más estable desde el punto de vista numérico y es ampliamente preferido en implementaciones computacionales modernas.

El contraste entre Gram–Schmidt y Householder es un tema central en la práctica del álgebra lineal numérica. Mientras el primero ofrece claridad conceptual y una interpretación directa de la construcción de una base ortonormal, el segundo se impone en aplicaciones reales por su estabilidad y eficiencia en el manejo de errores de redondeo. De hecho, la mayoría de las bibliotecas numéricas actuales, como LAPACK, implementan variantes del método de Householder para cálculos de factorización QR.

Por otro lado, también existen métodos basados en rotaciones de Givens, que resultan particularmente útiles cuando se desea introducir ceros en posiciones específicas de la matriz, siendo ideales para matrices dispersas.

En este trabajo se abordará en primer lugar la fundamentación teórica de la descomposición QR, incluyendo sus definiciones y propiedades esenciales. Posteriormente, se detallarán los algoritmos de Gram–Schmidt y Householder, junto con ejemplos que ilustran sus diferencias prácticas. Finalmente, se discutirán

aplicaciones concretas en la resolución de sistemas de mínimos cuadrados y en métodos de valores propios, presentando además una comparación de eficiencia y estabilidad numérica.

La amplitud de aplicaciones de la descomposición QR, sumada a la riqueza de los métodos para su cálculo, hacen de este tema un punto de convergencia entre la teoría del álgebra lineal y la práctica de la computación científica. De allí su importancia en la formación académica de matemáticos, ingenieros y científicos aplicados.

Capítulo 1

Transformaciones de Householder

En este capítulo se presenta un método alternativo al proceso de Gram–Schmidt para la obtención de la descomposición QR: las transformaciones de Householder. A diferencia del procedimiento clásico de ortonormalización, este enfoque se basa en la construcción de reflexiones ortogonales que eliminan sistemáticamente las entradas de una matriz por debajo de su diagonal principal. El método es numéricamente más estable y constituye la técnica preferida en implementaciones computacionales modernas.

1.1. Concepto de Reflexión de Householder

Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} , dotado de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S un subespacio vectorial de V , y $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ una base ortonormal de S . Dado $v \in V$, un elemento $\tilde{v} \in S$ definido por

$$\tilde{v} = \sum_{j=1}^n \langle v, q_j \rangle q_j \quad (1.1)$$

es la **proyección ortogonal de v sobre S** y $w = v - \tilde{v}$ es la proyección ortogonal de v sobre S^\perp .

Ahora, sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\|_2 = 1$ y S el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n generado por u , o sea, $S = \text{span}(u)$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, vamos a encontrar la proyección ortogonal de x sobre S . Observe que la proyección $\tilde{u} = \alpha u$ satisface $\langle x - \alpha u, u \rangle = 0$. Por lo tanto, $\alpha = u^T x$, y así $\tilde{u} = \alpha u = (u^T x)u$ es la proyección ortogonal de $x \in \mathbb{R}^n$ sobre $S = \text{span}(u)$.

Consideremos ahora el vector $\tilde{x} = x - 2\tilde{u}$. El vector \tilde{x} representa la **reflexión** de x sobre el complemento ortogonal de S . Note que

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - 2\tilde{u} \\ &= x - 2(u^T x)u \\ &= x - (2uu^T)x \\ &= (I - 2uu^T)x = Hx. \end{aligned}$$

La matriz $H = I - 2uu^T$, con $\|u\|_2 = 1$ es la **matriz de Householder**, también conocida como **reflector**

de Householder. Es fácil ver que $H^T = H$ y $H^2 = I$, por lo tanto H es ortogonal.

1.2. Construcción de la Descomposición QR

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\text{rango}(A) = n$. La idea es construir matrices de Householder $H_1, \dots, H_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tales que

$$H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R, \quad (1.2)$$

donde $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene la forma bloque

$$R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ \mathbf{0}_{(m-n) \times n} \end{bmatrix}, \quad \hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ triangular superior.} \quad (1.3)$$

En particular, si definimos $Q = (H_1 H_2 \cdots H_n)^T$, entonces $A = QR$ constituye una descomposición QR de A .

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. ¿Cuál es el reflector de Householder $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $Hx = \alpha e_1$, en donde $\alpha \neq 0$ y $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$? Note que

$$Hx = \alpha e_1 \Rightarrow (I - 2uu^T)x = \alpha e_1 \Rightarrow x - 2u(u^T x) = \alpha e_1 \Rightarrow 2u(u^T x) = x - \alpha e_1. \quad (*)$$

Si $u^T x = 0$, no hay nada que hacer, pues en este caso tenemos $Hx = x$ (es decir, la reflexión de x sobre $\text{span}\{e_1\}$ es el propio x). Suponiendo $u^T x \neq 0$, observe, a partir de (*), que

$$u = \frac{1}{2(u^T x)}(x - \alpha e_1) = \beta(x - \alpha e_1),$$

con $\beta = 1/2(u^T x)$. Es decir, el vector u buscado deberá ser paralelo al vector $x - \alpha e_1$. Vamos a definir $\tilde{u} = x - \alpha e_1$. Para determinar α , note que

$$Hx = \alpha e_1 \Rightarrow \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha| \|e_1\|_2 = |\alpha|.$$

Como H es ortogonal, tenemos que $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$. Luego, debemos tener $|\alpha| = \|x\|_2$, es decir, $\alpha = \pm \|x\|_2$. Así, $\tilde{u} = x \pm \|x\|_2 e_1$, y definiendo

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2},$$

obtenemos

$$H = I - 2uu^T, \quad \text{con } u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2} \text{ y } \tilde{u} = x \pm \|x\|_2 e_1.$$

Observe que

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} x_1 \pm \|x\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Problema: ¿Qué signo escoger en la construcción de Householder?

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, y consideremos el reflector de Householder que lleva x a un múltiplo del primer vector canónico $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Hemos definido

$$\tilde{u} = x \pm \|x\|_2 e_1, \quad u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|_2}, \quad H = I - 2uu^T.$$

El problema consiste en determinar cuál signo \pm utilizar. Si $x_1 > 0$ y elegimos

$$\tilde{u} = x - \|x\|_2 e_1,$$

entonces la primera coordenada es $\tilde{u}_1 = x_1 - \|x\|_2$, que puede ser muy cercana a cero si $x_1 \approx \|x\|_2$. En ese caso, \tilde{u} queda casi nulo en la primera componente, lo que provoca *cancelación de dígitos* y puede introducir errores de redondeo graves en la implementación numérica. De manera análoga, si $x_1 < 0$ y elegimos

$$\tilde{u} = x + \|x\|_2 e_1,$$

también podemos tener $\tilde{u}_1 \approx 0$, con el mismo problema.

Para evitar cancelación, siempre se escoge el signo de modo que \tilde{u}_1 quede lo más grande posible en magnitud. Esto se logra tomando

$$\tilde{u} = x + \operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1,$$

donde

$$\operatorname{sgn}(x_1) = \begin{cases} +1, & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -1, & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Con esta elección, $\tilde{u}_1 = x_1 + \operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2$ tiene magnitud al menos $2|x_1|$, lo cual asegura estabilidad numérica. El reflector de Householder que lleva x a $-\operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1$ se construye como

$$H = I - 2uu^T, \quad u = \frac{x + \operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1}{\|x + \operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1\|_2}.$$

Observación 1.1. Si $x \neq 0$ pero $\|x\|_2 \approx 0$, también podemos tener problemas numéricos. Para evitar esto, antes de aplicar el reflector de Householder definimos

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_\infty},$$

de modo que la mayor componente de \hat{x} sea igual a 1.

Observe que

$$Hx = \operatorname{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1 \iff H\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \operatorname{sgn}(x_1) \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} e_1.$$

Pero

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_2 = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty},$$

por lo tanto

$$H\hat{x} = \operatorname{sgn}(x_1) \|\hat{x}\|_2 e_1.$$

En conclusión, al normalizar previamente x con la norma infinito, garantizamos que la mayor componente de \hat{x} sea exactamente 1. De este modo se evita pérdida de precisión en la construcción del reflector de Householder y se asegura un comportamiento numérico más estable.

Finalmente, veamos cómo aplicar los reflectores de Householder para obtener la factorización QR de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y $\text{rango}(A) = n$.

Paso 1: Sea a_1 la primera columna de A . Defina

$$x = a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \tilde{u}_1 = x + \text{sgn}(a_{11})\|x\|_2 e_1, \quad e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m.$$

Luego

$$u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|_2}, \quad H_1 = I - 2u_1 u_1^T,$$

y así obtenemos

$$A^{(1)} = H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Paso 2: Sea $a_2^{(1)}$ la segunda columna de $A^{(1)}$. Defina

$$x = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1}, \quad \tilde{u}_2 = x + \text{sgn}(a_{22}^{(1)})\|x\|_2 e_1, \quad e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Defina

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|_2}, \quad \hat{H}_2 = I - 2u_2 u_2^T.$$

Si extendemos \hat{H}_2 a dimensión $m \times m$, obtenemos

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{H}_2 \end{bmatrix}.$$

Tenemos entonces

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & \hat{H}_2 & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

para obtener

$$A^{(2)} = H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Paso 3: Sea $a_3^{(2)}$ la tercera columna de $A^{(2)}$. Defina

$$x = \begin{bmatrix} a_{33}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{m3}^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m-2}, \quad \tilde{u}_3 = x + \operatorname{sgn}(a_{33}^{(2)})\|x\|_2 e_1, \quad e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{m-2}.$$

Definimos

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|_2}, \quad \hat{H}_3 = I - 2u_3 u_3^T, \quad H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \hat{H}_3 \end{bmatrix}.$$

De esta forma obtenemos

$$A^{(3)} = H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \cdots & a_{1n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Paso k : Sea $a_k^{(k-1)}$ la k -ésima columna de $A^{(k-1)}$. Defina

$$x = \begin{bmatrix} a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{(k+1)k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{mk}^{(k-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m-k+1}, \quad \tilde{u}_k = x + \operatorname{sgn}(a_{kk}^{(k-1)})\|x\|_2 e_1, \quad e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{m-k+1}.$$

Luego

$$u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|_2}, \quad \hat{H}_k = I - 2u_k u_k^T,$$

y extendemos \hat{H}_k a dimensión $m \times m$ definiendo

$$H_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \hat{H}_k \end{bmatrix}.$$

De esta manera

$$A^{(k)} = H_k H_{k-1} \cdots H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \cdots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Al final del proceso obtenemos

$$R = H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A,$$

donde $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es triangular superior. Además,

$$A = H_1^T H_2^T \cdots H_n^T R = QR,$$

con

$$Q = H_1^T H_2^T \cdots H_n^T \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

que es ortogonal, y

$$R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ triangular superior.}$$

1.3. Ilustración

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Paso 1 (columna 1)

Tomamos $x = A(:, 1) = (4, 3, 0)^T$, $\|x\|_2 = 5$ y $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Con la regla del signo, $\tilde{u}_1 = x + \|x\|_2 e_1 = (9, 3, 0)^T$. Normalizamos $u_1 = \tilde{u}_1 / \|\tilde{u}_1\|_2 = \frac{1}{\sqrt{90}}(9, 3, 0)^T = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0)^T$. El reflector es

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^T = I - \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando H_1 :

$$A^{(1)} = H_1 A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Paso 2 (columna 2, filas 2-3)

Tomamos el subvector $x = A^{(1)}(2:3, 2) = (1, 5)^T$, con $\|x\|_2 = \sqrt{26}$ y $e_1 = (1, 0)^T$.

$$\tilde{u}_2 = x + \|x\|_2 e_1 = (1 + \sqrt{26}, 5)^T, \quad u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|_2}.$$

El reflector reducido es $\hat{H}_2 = I - 2u_2u_2^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Lo extendemos a $m \times m$:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \text{con} \quad H_2(2:3, 2:3) = \hat{H}_2.$$

Aplicando H_2 :

$$A^{(2)} = H_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -\sqrt{26} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: R.$$

Matriz Q

Como los reflectores son simétricos y ortogonales,

$$Q = H_1 H_2, \quad A = QR.$$

En forma explícita,

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3\sqrt{26}}{130} & \frac{3\sqrt{26}}{26} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2\sqrt{26}}{65} & -\frac{2\sqrt{26}}{13} \\ 0 & -\frac{5\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{26}}{26} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & -\sqrt{26} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y se verifica $Q^T Q = I$ y $A = QR$.

Nota sobre signos. Si se desea que la diagonal de R sea positiva, basta con cambiar el signo de la columna correspondiente de Q y la fila correspondiente de R (lo que no altera el producto QR).

Capítulo 2

Referencias bibliográficas en L^AT_EX

En este capítulo se explica cómo manejar citas y bibliografía en L^AT_EX. El método más común es usar un archivo `.bib` (BibTeX) que contiene las referencias, y luego citarlas en el texto con comandos como `\cite`.

2.1. Archivos `.bib`

Un archivo `bibliografia.bib` almacena las referencias en formato BibTeX. Cada entrada tiene un tipo (artículo, libro, tesis, etc.), una clave, y los campos necesarios. Ejemplo de archivo `bibliografia.bib`:

```
@book{knuth,  
  author    = {Donald E. Knuth},  
  title     = {The Art of Computer Programming},  
  publisher = {Addison-Wesley},  
  year      = {1998},  
}
```

Una buena idea es buscar la referencia usada en el sitio **Google Scholar** (<https://scholar.google.com/>). En la figura abajo se muestra la búsqueda del libro *Numerical Mathematics* de Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco y Fausto Saleri.

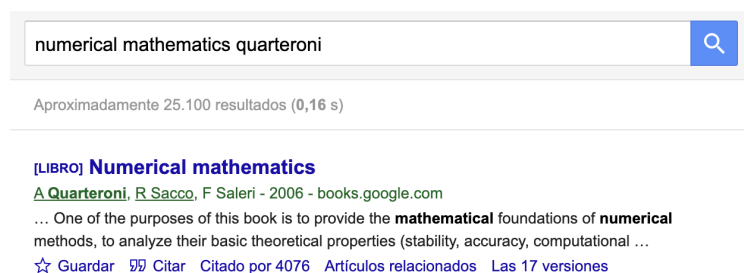


Figura 2.1: Búsqueda en Google Scholar

Para extraer los datos de la referencia e insertarlos en el archivo `bibliografia.bib`, le damos clic en donde dice **Citar** (parte inferior de la figura arriba), y aparecerá algo como lo siguiente:



Figura 2.2: Citas en Google Scholar

Seleccionamos la opción **BibTeX** y obtendremos la referencia para copiarla y pegarla en el archivo de la bibliografía.

2.2. Citas en el texto

Una vez definido el archivo `.bib`, si deseamos citar una referencia usamos el comando `\cite{etiqueta_referencia}`, por ejemplo, el libro de Quarteroni esta definido como:

```
@book{quarteroni,
  title={Numerical mathematics},
  author={Quarteroni, Alfio and Sacco, Riccardo and Saleri, Fausto},
  volume={37},
  year={2006},
  publisher={Springer Science \& Business Media}
}
```

donde la primera línea corresponde a la etiqueta de la bibliografía, en este caso, "quarteroni". Por lo tanto, para citarlo debemos colocar `\cite{quarteroni}`. En esta plantilla hemos usado el estilo **alpha**, el cual muestra la letra inicial del apellido de cada autor seguido de los últimos dos dígitos del año. Por ejemplo, al citar el libro de Quarteroni quedaría: [QSS06]. Para más detalles sobre estilos en las referencias, lea la documentación disponible en el sitio oficial del paquete natbib: <https://ctan.org/pkg/natbib>.

Capítulo 3

Figuras y Tablas en L^AT_EX

El uso de figuras y tablas en L^AT_EX es fundamental para presentar datos, gráficos y resultados de manera clara y profesional. En este capítulo se explicará cómo insertar imágenes, darles un título (`caption`), referenciarlas y crear tablas bien formateadas.

3.1. Insertar figuras

Para trabajar con imágenes, debe cargarse el paquete `graphicx` en el preámbulo (ya está cargado en esta plantilla). El entorno básico para insertar una figura es:

```
\begin{figure}[ht!]  
  \centering  
  \includegraphics[width=0.6\textwidth]{ejemplo.png}  
  \caption{Ejemplo de figura en \LaTeX.}  
  \label{fig:ejemplo}  
\end{figure}
```

Al referenciar en el texto: “como se observa en la [Figura 3.1](#)”.



Figura 3.1: Ejemplo de figura en L^AT_EX

Opciones de tamaño:

- `width=0.5\textwidth`: escala relativa al ancho del texto.
- `height=5cm`: ajusta la altura fija.
- `scale=0.8`: factor de reducción.

Posición de figuras: El argumento opcional del entorno (`[h!]`, `[t]`, `[b]`) controla la ubicación:

- `h`: aquí.
- `t`: parte superior.
- `b`: parte inferior.

3.2. Tablas en \LaTeX

Para crear tablas simples se usa el entorno `tabular`.

```
\begin{table}[h!]
\centering
\caption{Ejemplo de tabla básica.}
\label{tab:ejemplo}
\begin{tabular}{|c|c|c|}
\hline
Nombre & Edad & Ciudad \\
\hline
Ana & 23 & Barranquilla \\
Luis & 30 & Bogotá \\
Marta & 27 & Medellín \\
\hline
\end{tabular}
\end{table}
```

Nombre	Edad	Ciudad
Ana	23	Barranquilla
Luis	30	Bogotá
Marta	27	Medellín

Cuadro 3.1: Ejemplo de tabla básica.

La Tabla 3.3 consiste de un conjunto de datos serológicos correspondiente a 8.870 personas, recopilado antes de la introducción de la vacuna contra el sarampión, las paperas y la rubéola en el Reino Unido. Dicho conjunto se utiliza en un modelo cuyo propósito es describir la tasa a la que los individuos susceptibles adquieren la infección por estas enfermedades a diferentes edades. La tabla presenta la proporción estimada de seropositivos dentro del segmento no vacunado de la muestra, dividido en 29 grupos etarios.

Grupo de edad (años)	Proporción de seropositivos			Grupo de edad (años)	Proporción de seropositivos		
	Sarampión	Paperas	Rubeóla		Sarampión	Paperas	Rubeóla
[1, 2)	0.207	0.115	0.126	[17, 19)	0.898	0.895	0.869
[2, 3)	0.301	0.147	0.171	[19, 21)	0.959	0.911	0.844
[3, 4)	0.409	0.389	0.184	[21, 23)	0.957	0.920	0.852
[4, 5)	0.589	0.516	0.286	[23, 25)	0.937	0.915	0.907
[5, 6)	0.757	0.669	0.400	[25, 27)	0.918	0.950	0.935
[6, 7)	0.669	0.768	0.503	[27, 29)	0.939	0.909	0.921
[7, 8)	0.797	0.786	0.524	[29, 31)	0.967	0.873	0.896
[8, 9)	0.818	0.798	0.634	[31, 33)	0.973	0.880	0.890
[9, 10)	0.866	0.878	0.742	[33, 35)	0.943	0.915	0.949
[10, 11)	0.859	0.861	0.664	[35, 40)	0.967	0.906	0.899
[11, 12)	0.908	0.844	0.735	[40, 45)	0.946	0.933	0.955
[12, 13)	0.923	0.881	0.815	[45, 55)	0.961	0.917	0.937
[13, 14)	0.889	0.895	0.768	[55, 65)	0.968	0.898	0.933
[14, 15)	0.936	0.882	0.842	[65, $+\infty$)	0.968	0.839	0.917
[15, 17)	0.889	0.869	0.760				

Cuadro 3.2: Ejemplo de una tabla mas elaborada.

Se puede observar que la tabla anterior excede los márgenes del texto. Para evitar este problema, se emplea el comando `\resizebox{\textwidth}{!}{Entorno tabular}`. Dicho comando ajusta automáticamente el tamaño de la tabla para que se adapte al ancho de la página, sin sobrepasar los márgenes establecidos. La salida corregida se muestra en la siguiente tabla:

Grupo de edad (años)	Proporción de seropositivos			Grupo de edad (años)	Proporción de seropositivos		
	Sarampión	Paperas	Rubeóla		Sarampión	Paperas	Rubeóla
[1, 2)	0.207	0.115	0.126	[17, 19)	0.898	0.895	0.869
[2, 3)	0.301	0.147	0.171	[19, 21)	0.959	0.911	0.844
[3, 4)	0.409	0.389	0.184	[21, 23)	0.957	0.920	0.852
[4, 5)	0.589	0.516	0.286	[23, 25)	0.937	0.915	0.907
[5, 6)	0.757	0.669	0.400	[25, 27)	0.918	0.950	0.935
[6, 7)	0.669	0.768	0.503	[27, 29)	0.939	0.909	0.921
[7, 8)	0.797	0.786	0.524	[29, 31)	0.967	0.873	0.896
[8, 9)	0.818	0.798	0.634	[31, 33)	0.973	0.880	0.890
[9, 10)	0.866	0.878	0.742	[33, 35)	0.943	0.915	0.949
[10, 11)	0.859	0.861	0.664	[35, 40)	0.967	0.906	0.899
[11, 12)	0.908	0.844	0.735	[40, 45)	0.946	0.933	0.955
[12, 13)	0.923	0.881	0.815	[45, 55)	0.961	0.917	0.937
[13, 14)	0.889	0.895	0.768	[55, 65)	0.968	0.898	0.933
[14, 15)	0.936	0.882	0.842	[65, $+\infty$)	0.968	0.839	0.917
[15, 17)	0.889	0.869	0.760				

Cuadro 3.3: Ejemplo de tabla con tamaño ajustado a los márgenes del documento.

3.3. Figuras usando el entorno tabular

En algunos casos es necesario presentar varias imágenes dentro de un mismo entorno `figure`. Una manera sencilla de hacerlo consiste en utilizar el entorno `tabular`, el cual permite organizar las figuras en filas y columnas. A continuación se muestra un ejemplo de su implementación:

```
\begin{figure}[ht!]
\begin{center}
\begin{tabular}{ccc}
\includegraphics[tamaño de la imagen]{figura1} &
\includegraphics[tamaño de la imagen]{figura2} &
\includegraphics[tamaño de la imagen]{figura3} \\
(a) figura 1 & (b) figura 2 & (c) figura 3
\end{tabular}
\end{center}
\caption{Ejemplo de tres imágenes en un solo entorno figure}
\label{fig1}
\end{figure}
```

Usando los datos de la Tabla 3.3, podemos construir los siguientes tres gráficos:

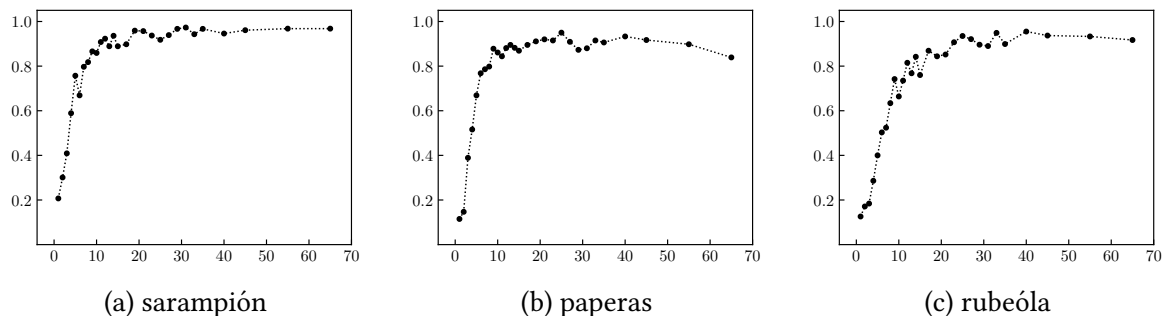


Figura 3.2: Ejemplo de tres imágenes en un solo entorno `figure`: proporción observada de seropositivos para las tres enfermedades consideradas en la Tabla 3.3.

Capítulo 4

Conclusiones y Aplicaciones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo y se mencionan algunas de las aplicaciones más relevantes de la descomposición QR en el ámbito de la matemática aplicada, la estadística y la computación científica. El objetivo es resaltar la importancia de esta factorización como herramienta fundamental en la práctica del álgebra lineal numérica.

4.1. Conclusiones Generales

A lo largo de este trabajo se estudiaron dos métodos clásicos para la obtención de la descomposición QR de una matriz: el proceso de ortonormalización de Gram–Schmidt y las transformaciones de Householder.

Del análisis realizado, se pueden destacar las siguientes conclusiones principales:

- La descomposición QR es un procedimiento que permite expresar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ como el producto de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R .
- El proceso de Gram–Schmidt proporciona una construcción paso a paso de una base ortonormal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Si bien es un método intuitivo y de gran valor pedagógico, presenta limitaciones en cuanto a estabilidad numérica, lo cual puede afectar su implementación en la práctica computacional.
- Las transformaciones de Householder ofrecen un procedimiento mucho más estable desde el punto de vista numérico. Aunque su interpretación geométrica es menos inmediata, constituyen la técnica preferida en aplicaciones reales y en bibliotecas de software científico debido a su robustez y precisión.
- El estudio comparativo muestra que, mientras Gram–Schmidt es útil en la enseñanza y en problemas de pequeña escala, las reflexiones de Householder son indispensables en cálculos de gran tamaño y en contextos donde la precisión numérica es crítica.

4.2. Aplicaciones de la Descomposición QR

La factorización QR ocupa un lugar destacado en múltiples áreas de la matemática y sus aplicaciones. Algunas de las más relevantes son las siguientes:

Resolución de sistemas de mínimos cuadrados

Uno de los usos más comunes de la descomposición QR es en la resolución de problemas de mínimos cuadrados. Dado un sistema sobredeterminado $Ax \approx b$, la factorización QR permite transformarlo en el sistema triangular

$$Rx = Q^T b,$$

el cual puede resolverse de manera directa y eficiente. Esta aplicación es particularmente importante en estadística, análisis de datos y aprendizaje automático, donde los problemas de regresión lineal aparecen con gran frecuencia.

Cálculo de valores propios

El *algoritmo QR*, basado en la factorización QR repetida de una matriz, es uno de los métodos más importantes y utilizados para la aproximación de valores propios. Gracias a sus propiedades de estabilidad y convergencia, este método se ha convertido en un pilar de la teoría espectral numérica y en una herramienta indispensable en software de cómputo científico.

Bibliografía

- [QSS06] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2006. Citado en la página [12](#).